AUSGLEICHUNG

DER

BEOBACHTUNGSFEHLER

NACH DER METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATSUMMEN.

AUSGLEICHUNG

DER

BEOBACHTUNGSFEHLER

NACH DER METHODE

DER

KLEINSTEN QUADRATSUMMEN.

Mit

zahlreichen Anwendungen, namentlich auf geodätische Messungen.

Von

Joseph

Dr. J. DIENGER,

Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

MIT IN DEN TEXT EINGEDRUCKTEN HOLZSCHNITTEN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1857.

Vorwort.

Die vorliegende kleine Schrift enthält eine vollständige Theorie der sogenannten Methode der kleinsten Quadrate, wenn dieselbe auf das Wesentliche reducirt, namentlich der gewöhnlich damit zusammengestellten praktischen Rechnungsmethoden entkleidet wird. Dass dadurch der Zusammenhang der ganzen Theorie nur um so klarer vor das Auge tritt, ist wohl nicht zu bezweifeln, und es war dies auch ein Hauptgrund, warum ich gerade so verfahren bin. Den Begriff des mittleren Fehlers habe ich nirgends aufgenommen, da der des wahrscheinlichen Fehlers genügt, und mir viel natürlicher erscheint.

Einzelne Beispiele als Erläuterung der Theorie habe ich schon in die eigentliche Theorie mit einverflochten; ausführlichere und mannigfaltigere sind dann am Schlusse beigegeben. Ich hätte in dieser Beziehung vielleicht mehr thun sollen; doch möchte es für den Augenblick an dem Gegebenen genügen. Weiteres könnte ja später nachgeholt werden.

Bei jedem Beispiele ist angegeben worden, woher es entlehnt wurde, da ich nur wirkliche Beobachtungen aufnehmen wollte.

Dass ich später vorzugsweise die Ausgleichung der Winkel in einem geodätischen Dreiecksnetze behandelte, hat auch darin seinen Grund, dass diese Aufgabe vollständig als Beispiel sich durchführen liess und eine grosse Anzahl Erörterungen dabei nothwendig wurde, welche die ganze Theorie aufhellen können.

Die aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung benutzten Sätze finden sich in der Einleitung auseinandergesetzt.

Inhalt.

Einleitung.

Sätze aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, von denen wir im Folgenden Gebrauch machen wollen.

I.

Hängt das Eintreten eines Ereignisses von uns gänzlich unbekannten, oder doch in ihrer Wirkung keineswegs zu berechnenden Ursachen ab, so sagen wir, es hänge von zufälligen Ursachen ab, d. h. wir erklären, wir seien nicht im Stande, zum Voraus zu bestimmen, ob gerade dieses oder auch ein anderes Ereigniss unter denselben Verhältnissen zum Vorschein kommen werde.

Befinden sich etwa in einer Urne 20 weisse und 10 schwarze Kugeln, die für das Gefühl gar nicht zu unterscheiden sind, und man greift blindlings in die Urne hinein, um eine Kugel herauszuholen, so ist es im Voraus nicht möglich zu bestimmen, ob gerade eine weisse oder eine schwarze Kugel werde erhalten werden. Es ist also das Eine, wie das Andere zufällig; freilich muss in diesem Falle eines der beiden eintreten.

Bleiben wir noch weiter bei diesem Beispiele stehen, so ist klar, dass man denn doch eher darauf zählen wird, eine weisse, als eine schwarze Kugel zu erhalten, einfach darum, weil die ersteren in grösserer Anzahl vorhanden sind als die letzteren. Man pflegt deshalb im gewöhnlichen Leben zu sagen, es sei wahrscheinlicher, eine weisse Kugel zu erhalten, als eine schwarze. Man bezeichnet hiemit also ein gewissermaassen, unbestimmtes Gefühl, es werden, wenn man eine Kugel herausnimmt und dieselbe sogleich wieder in die Urne zurücklegt, bei einem

sehr vielmal wiederholten derartigen Herausnehmen, im Ganzen mehr weisse als schwarze Kugeln erschienen sein. Ja man wird durch das einfache natürliche Gefühl darauf geleitet, auszusprechen, dass bei solchen sehr oft wiederholten Ziehungen schliesslich doppelt so viele weisse als schwarze Kugeln herausgekommen sein werden, eben weil auch doppelt so viel weisse als schwarze Kugeln sich in der Urne befinden. Dabei muss man aber wohl beachten, dass bei einer einmaligen Ziehung ebenso wohl eine schwarze als eine weisse Kugel zum Vorschein kommen kann, d. h. dass beide Fälle gleich möglich sind. Gleich wahrscheinlich sind sie aber nicht.

Verallgemeinern wir das Gesagte, so können wir nun das Folgende aussprechen: Können aus ein- und derselben Quelle (Urne) eine gewisse Anzahl Ereignisse als gleich möglich hervorgehen (Erscheinen einer weissen oder einer schwarzen Kugel) und man theilt alle diese möglichen Ereignisse in zwei Gruppen ab, wovon die eine n, die andere m Fälle enthalte (20 weisse und 10 schwarze Kugeln), so darf man darauf zählen, dass wenn man sehr vielmal ein Ereigniss hat eintreten lassen, diese eingetretenen Ereignisse sich so vertheilen werden, dass die Anzahl derselben, die zur ersten Gruppe gehören, zu denen der zweiten Gruppe sich wie n zu m verhalte. Man nennt dies das Gesetz der grossen Zahlen, muss aber dabei wohl beachten, dass es nur dann zulässig ist, wenn man den ganzen Hergang als ähnlich dem oben gewählten Beispiele ansehen kann.

In derselben Weise lässt sich der Satz für drei oder mehr Gruppen aussprechen. Befinden sich etwa in einer Urne 15 weisse, 18 schwarze und 12 grüne Kugeln, so darf man annehmen, dass wenn man blindlings eine Kugel zieht und dann wieder hineinlegt, nach sehr oftmaligem Wiederholen derselben Handlung die Anzahlen von gezogenen weissen, schwarzen, grünen Kugeln sich verhalten werden, wie 15 zu 18 zu 12. U. s. w.

II.

Gesetzt wieder, es befinden sich in einer Urne 29 weisse und 19 schwarze Kugeln, so würden, wenn das Gesetz der grossen Zahlen sogleich Anwendung finden könnte, unter 48 Zügen (wenn

jeweils die Kugel wieder in die Urne zurückgelegt würde) nothwendig 29 weisse und 19 schwarze Kugeln sein. Dies ist nun vielleicht nicht für die 48 ersten Züge der Fall, wohl aber wenn die 48 Züge sehr oft wiederholt werden. Wenn deshalb ihrer zwei mit einander wetten würden, so dass A gewänne, wenn eine weisse, B, wenn eine schwarze Kugel zum Vorschein kommt, so müsste, wenn das Spiel lange genug dauern würde, bei gleichen Einsätzen nothwendig A in entschiedenen Vortheil kommen. Soll Gleichheit im Spiel vorhanden sein, so muss der Einsatz so geregelt werden, dass B in 19 Malen so viel gewinnen kann, als A in 29 Malen, d. h. A hat 29 zu setzen, wenn B 19 setzt, oder von dem Gesammteinsatz trägt A $\frac{29}{48}$, B nur $\frac{19}{48}$. Da, bei lange genug fortgesetztem Spiele, A auch darauf rechnen kann, $\frac{29}{48}$ aller Fälle für sich zu haben, B nur $\frac{19}{48}$, so wird dann wirklich Gleichheit im Spiele vorhanden sein. Wollte man dies gleich auf einen einzigen Fall übertragen, so würde man sagen: wenn A $\frac{29}{48}$ wetten kann, dass der betreffende Fall für ihn günstig sei, so kann B nur $\frac{19}{48}$ wetten.

Von diesem Gesichtspunkte aus sagt man nun, die Wahrscheinlichkeit, bei einem blindlings geschehenden Zuge eine weisse Kugel zu erhalten, sei $\frac{29}{48}$, während die, eine schwarze zu erhalten, nur $\frac{19}{48}$ ist, und man versteht also unter der Wahrscheinlichkeit eines kommenden Ereignisses die Anzahl der für das Eintreffen günstigen Fälle, dividirt durch die Anzahl aller möglichen Fälle, immer dabei verstanden, dass der ganze Hergang ein ähnlicher ist, wie der mit der Urne und den Kugeln.

Befänden sich in einer Urne 16 weisse, 15 rothe, 18 blaue Kugeln, so wären die Wahrscheinlichkeiten, bei blindlings geschehendem Hineingreifen eine weisse, oder eine rothe, oder eine blaue Kugel zu erhalten, bezüglich $\frac{16}{49}$, $\frac{15}{49}$, $\frac{18}{49}$.

Die Wahrscheinlichkeit, als mathematische Zahl aufgefasst, ist also immer ein positiver ächter Bruch, und wenn $\frac{n}{m}$ dieselbe ist, so heisst dies, unter m gleich möglichen Fällen seien ihrer n für das erwartete Ereigniss günstig.

Können also aus derselben Quelle nur zweierlei Ereignisse stammen, deren Wahrscheinlichkeiten n und n' sind, so muss nothwendig $n + n' = 1$ sein, wie etwa oben $\frac{29}{48} + \frac{19}{48} = 1$ war; können nur dreierlei Ereignisse daraus hervorgehen, und sind n, n', n'' die Wahrscheinlichkeiten derselben, so ist $n + n' + n'' = 1$ u. s. w. Endlich, wenn wieder nur zweierlei Ereignisse aus der betrachteten Quelle stammen, und n, n' ihre Wahrscheinlichkeiten sind, so wird man darauf zählen können, dass bei sehr vielen Wiederholungen die Anzahlen der eingetretenen Ereignisse der beiden Gruppen sich wie n zu n' verhalten werden. So in dem Beispiele von Nr. I. sind die betreffenden Wahrscheinlichkeiten $\frac{20}{30}$ und $\frac{10}{30}$, und man durfte bei sehr vielen Wiederholungen darauf zählen, dass auf je 20 weisse nur 10 schwarze Züge kommen; da aber 20 sich zu 10 verhält, wie $\frac{20}{30}$ zu $\frac{10}{30}$, so ist damit der Satz gerechtfertigt.

III.

Sind unter allen möglichen Fällen auch zugleich alle für das erwartete Ereigniss günstig, so ist das Eintreffen des letzteren gewiss, und wenn man gemäss II. die Wahrscheinlichkeit desselben kennen will, so erhält man 1 für dieselbe, so dass also 1 das mathematische Zeichen der Gewissheit ist. Sind in einer Urne nur 20 weisse Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit, beim blinden Hineingreifen eine weisse Kugel zu erhalten, $\frac{20}{20} = 1$, d. h. man erhält gewiss eine solche.

Kennt man ferner die Wahrscheinlichkeit $\frac{m}{n}$ eines kommenden Ereignisses, so ist $1 - \frac{m}{n}$ die Wahrscheinlichkeit des Nicht-

eintreffens des fraglichen Ereignisses. Denn unter n möglichen Fällen sind ihrer m für das Eintreffen des Ereignisses, also ihrer $n-m$ für das Nichteintreffen günstig. Somit ist — gemäss II. — die Wahrscheinlichkeit des Nichteintreffens $\frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$. Sind in einer Urne 68 Kugeln, von denen 22 weiss sind, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine weisse Kugel zu erhalten $\frac{22}{68}$, die eine solche nicht zu erhalten $1 - \frac{22}{68} = \frac{46}{68}$, wie natürlich, da ja 46 anders gefärbte sich in der Urne befinden.

Kann ein Ereigniss eben so leicht eintreffen, als es nicht eintreffen kann, so ist die Wahrscheinlichkeit seines Eintreffens $= \frac{1}{2}$, da dann die seines Nichteintreffens $1 - \frac{1}{2}$, d. h. auch $= \frac{1}{2}$ ist.

IV.

Stammen aus derselben Quelle mehrere Ereignisse $A, B, C, \ldots$ und man kennt die Wahrscheinlichkeit a des Eintreffens von A, die b von B, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass entweder A, oder B eintrifft, gleich $a + b$.

Seien etwa in einer Urne 20 rothe, 16 schwarze, 14 gelbe Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit, eine rothe zu ziehen $\frac{20}{50}$, die eine schwarze zu erhalten $\frac{16}{50}$; sucht man aber die Wahrscheinlichkeit, entweder eine rothe, oder eine schwarze Kugel zu ziehen, so sind jetzt 36 Fälle unter 50 günstig, also ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $= \frac{36}{50} = \frac{20}{50} + \frac{16}{50}$, was den Satz beweist. Sind $a, b, c, \ldots$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A, B, C, \ldots$, die sämmtlich aus derselben Quelle stammen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass entweder A, oder B, oder $C, \ldots$ eintrifft, gleich $a + b + c + \ldots$. (Natürlich übersteigt diese Summe niemals die Einheit.)

V.

Sind a, b die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide zugleich eintreffen $= ab$.

Man habe zwei Urnen, in der einen seien 21 schwarze und 32 weisse, in der anderen 16 schwarze und 25 weisse Kugeln, so ist die Wahrscheinlichkeit, aus der ersten eine schwarze Kugel zu ziehen $= \frac{21}{53}$, die aus der zweiten eine solche zu erhalten $= \frac{16}{41}$. Sucht man nun die Wahrscheinlichkeit, beim gleichzeitigen Hineingreifen in beide Urnen in jeder Hand eine schwarze Kugel zu erhalten, so wird man beachten, dass jede der 53 Kugeln der ersten Urne mit jeder der 41 aus der zweiten zusammen erscheinen kann, dass also $53 . 41$ Fälle des Zusammentreffens zweier Kugeln gleich möglich sind; aus demselben Grunde sind $21 . 16$ Fälle des Zusammentreffens zweier schwarzer Kugeln möglich, und mithin ist die Wahrscheinlichkeit, dass gerade ein solcher Fall erscheine, gleich $\frac{21 . 16}{53 . 41}$, nnd da dies $= \frac{21}{53} \cdot \frac{16}{41}$, so ist damit der Satz erwiesen.

Sind $a, b, c, \ldots$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A, B, $C, \ldots$, so ist die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintreffens aller gleich $a b c \ldots$.

Man muss dabei aber wohl beachten, dass die einzelnen Ereignisse von einander unabhängig sein müssen, so dass man sie immer dem gleichzeitigen Ziehen von Kugeln aus verschiedenen Urnen vergleichen kann.

VI.

Wenn ein beobachtetes Ereigniss von verschiedenen, ursprünglich gleich möglichen Ursachen herrühren kann, und man ist im Stande, zum Voraus die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (abgesehen von seinem durch Beobachtung wahrgenommenen Eintreffen) zu berechnen unter der Annahme, irgend eine bestimmte dieser Ursachen bestehe, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese bestimmte Ursache beim wirklichen Eintreffen bestanden habe, d. h. dass das beobachtete Ereigniss aus ihr hervorgegangen sei, ein Bruch, dessen Zähler eben die Wahrscheinlichkeit ist, die man zum Voraus für das Eintreffen des Ereignisses erhalten würde, wenn man diese Ursache als bestehend annähme, und des-

sen Nenner die Summe aller der ähnlichen Wahrscheinlichkeiten für alle ursprünglich gleich möglichen Ursachen ist.

Um den angegebenen Satz zu verdeutlichen und zugleich zu beweisen, wollen wir uns auf einem Tische n gleiche Felder denken, auf deren jedem sich dieselbe Anzahl s von Kugeln befinde. Auf dem ersten Felde seien von den s Kugeln ihrer m_1 weiss, auf dem zweiten ihrer $m_2, \ldots$, auf dem $n$ten ihrer m_n; der Rest bestehe jeweils aus schwarzen Kugeln. Man lasse nun, ohne dass ein Besehen erlaubt ist, eine Kugel vom Tische wegnehmen, wobei wir voraussetzen, dass es dem Wegnehmenden gleich bequem ist, zu einem beliebigen der Felder zu gelangen, und man sehe eine weisse Kugel weggenommen. Man sucht nun die Wahrscheinlichkeit, dass dieselbe gerade von dem $r$ten Felde komme.

Man sieht leicht, dass dieser Fall den allgemeinen ganz gut darstellt. Die n Felder sind n Ursachen, die alle zum Voraus gleich möglich und gleich wahrscheinlich sind, da sie alle gleich viel Kugeln enthalten; die weisse Kugel, die weggenommen wird, ist das eingetretene Ereigniss. Die Schlüsse also, die wir aus diesem Beispiele ziehen, gelten sofort allgemein.

Abgesehen von dem Eintreten des Ereignisses, wäre die Wahrscheinlichkeit, dass man eine weisse Kugel von dem 1sten, 2ten, ... Felde erhielte, gleich $\frac{m_1}{s}$, $\frac{m_2}{s}$, ... Nun ist eine weisse Kugel erschienen, und man fragt bloss nach der Wahrscheinlichkeit, dass sie vom $r$ten Felde herkomme. Auf diesem sind m_r weisse Kugeln, während im Ganzen $m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ weisse Kugeln vorhanden sind; demnach ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erschienene eine von dem $r$ten Felde sei, gleich $\frac{m_r}{m_1 + m_2 + \cdots + m_n}$. Da aber diese Grösse auch gleich

$$\frac{\frac{m_r}{s}}{\frac{m_1}{s} + \frac{m_2}{s} + \cdots + \frac{m_n}{s}},$$

so ist damit unsere Behauptung gerechtfertigt.

Dies sind die Sätze aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die wir zu Hülfe nehmen werden. Anwendungen anderer Art, wenn sie gleich zum klaren Verständniss derselben beitragen würden,

können hier nicht davon gemacht werden. Zum Voraus wollen wir, ein für alle Male, bemerken, dass wenn zuweilen die gemachten Anwendungen etwas gezwungen erscheinen sollten, man bei der Natur des Gegenstandes wohl beachten muss, dass es sich immer nur um das Zulässigste handeln kann. Wir werden jedoch suchen, die Anwendungen so ungezwungen als möglich zu machen.

Theorie der Ausgleichung der Beobachtungsfehler mittelst des Grundsatzes der kleinsten Quadratsummen.

§. 1.

Beobachtungsfehler. Wahrscheinlichkeit eines solchen, als Function seines Werthes. Maass der Genauigkeit der Beobachtungen.

Alle Beobachtungen von Werthen gewisser Grössen müssen wir als mit Fehlern behaftet ansehen, da uns sicher kein Mittel zu Gebote steht, bestimmen zu können, ob der gefundene Werth auch wirklich der wahre Werth, der zu bestimmen war, ist oder nicht. Wir werden ohnehin auch schon dadurch zu dieser Annahme gezwungen, dass mehrfach wiederholte Beobachtung derselben Grösse verschiedene Werthe für letztere liefert, und wir also nothwendig jede Beobachtung als fehlerhaft anzusehen haben. Diese Fehler nun können aus zweierlei Ursachen herrühren. Einerseits nämlich können Fehlerquellen vorhanden sein, die nach gewissen Gesetzen wirken, die wir zu erforschen vermögen, wie etwa bei Winkelmessungen die unrichtige Aufstellung des Instrumentes u. s. w. Fehler, die aus diesen Quellen stammen, können (bis auf einen gewissen Grad) mittelst Rechnung gefunden und also auch verbessert werden, und sind also in Wahrheit keine Fehler mehr, so dass wir von ihnen hier nicht handeln werden. Es können aber zweitens Ursachen vorhanden sein, deren Wirkung, ja deren Dasein wir nicht zu erforschen vermögen, und die unsere Beobachtungen dennoch fehlerhaft machen; solche etwa sind bei Winkelmessungen die nicht zu berechnenden Einflüsse

der Temperatur, nicht angebbare Biegungen einzelner Theile des Instrumentes, minder grosse Aufmerksamkeit beim Anvisiren oder Ablesen u. s. w. Diese Ursachen heissen wir, da wir ihre Wirkungsweise und die Gesetze derselben nicht kennen, zufällige, und die von ihnen herrührenden Fehler ebenso zufällige Beobachtungsfehler. Von diesen letzteren allein soll und kann hier die Rede sein, und wir werden bloss solche verstehen, wenn wir kurzweg von Beobachtungsfehlern sprechen.

In Bezug auf diese Beobachtungsfehler nun werden wir annehmen müssen, dass bei guten (d. h. sorgfältigen) Beobachtungen, und solche nur setzen wir voraus, Fehler desto seltener vorkommen werden, je grösser, und desto häufiger, je kleiner sie sind; ebenso werden wir annehmen müssen, dass positive Fehler (da die Beobachtung einen zu kleinen Werth ergab) ebenso häufig vorkommen werden, als gleich grosse negative. Theoretisch müssen wir annehmen, dass jeder beliebig grosse Fehler möglich sei, und können erst sagen, dass ein unendlich grosser Fehler absolut unmöglich ist. Thatsächlich wird schon ein nur etwas bedeutender Fehler nicht mehr vorkommen.

Denken wir uns nun, ein und dieselbe Grösse — z. B. ein Winkel — sei sehr viele Male beobachtet (gemessen) worden, so werden die einzelnen Werthe, die man so erhalten hat, sämmtlich fehlerhaft sein, doch wird man darauf zählen müssen, dass der kleinen Fehler weit mehr vorhanden seien, als der grossen, so dass, wenn man die Fehler nach ihrer absoluten Grösse sich geordnet denkt, von Null an bis zu einer gewissen Gränze viele, über jene Gränze hinaus nur noch wenige vorkommen, man also bildlich sagen könnte, es seien die Fehler um so dichter geordnet, je kleiner sie sind. Daraus ergiebt sich nun aber sogleich weiter, dass wenn man eine einzige Beobachtung macht, man in Bezug auf den dabei vorkommenden Fehler eher darauf wird zählen dürfen, dass er klein, als dass er gross sei, mit anderen Worten, es ist wahrscheinlicher, dass man einen kleinen, als dass man einen grossen Beobachtungsfehler begehe; möglich freilich sind beide. Fragen wir somit nach der Wahrscheinlichkeit, bei einer einzigen Beobachtung einen gewissen Fehler x zu begehen, so wird diese um so kleiner sein, als x gross ist, so dass sie sich mit x selbst ändert und also eine Function von x ist. Da ferner nur wenig

verschiedene Beobachtungsfehler so ziemlich gleich wahrscheinlich sind, so ändert sich jene Function nur wenig, wenn x sich um wenig ändert, und ist mithin eine stetige Function von x. Bezeichnen wir sie durch $f(x)$, so muss ferner $f(-x) = f(x)$ sein, da gleich grosse positive und negative Beobachtungsfehler gleich wahrscheinlich sind; ferner muss diese Grösse mit wachsendem x rasch abnehmen, indem halbwegs beträchtliche Fehler nur sehr wenig wahrscheinlich sind; absolut Null wird sie jedoch nur für $x = \infty$ sein. Daraus folgt, dass $\frac{df(x)}{dx}$ für positive x negativ, für negative x aber positiv sein muss, während $f(x)$ immer positiv ist. Um nun aber die analytische Form der Function $f(x)$ kennen zu lernen, werden wir folgende Untersuchungen anstellen.

Wir wollen annehmen, ein und dieselbe Grösse A (ein Winkel z. B.) sei sehr viele Male gleich sorgfältig beobachtet worden und man habe dafür die Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ gefunden. Ist nun z der wahre Werth von A, so hat man also die Fehler $z - a_1$, $z - a_2, \ldots, z - a_n$ begangen. Nun wären die Wahrscheinlichkeiten, überhaupt die Fehler $z - a_1, \ldots, z - a_n$ zu begehen, dem Vorstehenden gemäss: $f(z-a_1), f(z-a_2), \ldots, f(z-a_n)$; somit wäre die Wahrscheinlichkeit, sie alle (nach einander oder gleichzeitig ist hier gleichgültig) zu begehen (nach Einleitung V.): $f(z - a_1)\, f(z - a_2) \ldots f(z - a_n)$, welches Product zur Abkürzung mit P bezeichnet werden möge*). Diese Grösse P hängt aber von dem Werthe von z, den man nicht kennt, ab; nimmt z verschiedene Werthe an, so ist dies auch mit P der Fall. Welchen Werth nun z habe, wissen wir nicht; eben deshalb müssen wir alle möglichen Werthe zulassen. Seien so $z_1, z_2, z_3, \ldots$ eine Reihe auf einander folgender Werthe von z; $P_1, P_2, \ldots$ die zugehörigen Werthe von P, so drücken diese letzteren die Wahrscheinlichkeiten aus, dass je ein bestimmtes System von n Beobachtungsfehlern zum Vorschein kommen werde. Wir können somit — gemäss Einleitung VI. — die Werthe von z als eben so viele Ursachen ansehen, aus denen dasselbe Ereigniss, nämlich

---

*) P ist also die zum Voraus berechnete Wahrscheinlichkeit, dass bei n auf einander folgenden Beobachtungen der Grösse A die Fehler $z - a_1$, $z - a_2, \ldots, z - a_n$ eintreten werden.

das Eintreffen von n Beobachtungsfehlern, hervorgehen kann; da dieses Ereigniss nun wirklich eingetroffen ist, so sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die eine oder die andere dieser Ursachen bestanden habe, d. h. dass $z_1, z_2, \ldots$ der wahre Werth von A sei:

$$\frac{P_1}{P_1+P_2+\ldots}, \quad \frac{P_2}{P_1+P_2+\ldots}, \quad \frac{P_3}{P_1+P_2+\ldots}, \ldots .$$

Die Nenner aller dieser Brüche sind gleich; also ist derjenige der grösste, der den grössten Zähler hat, somit ist der Werth von z, dem der grösste Werth von P entspricht, derjenige, den man als den wahrscheinlichsten Werth von A bezeichnen muss. In der Unkenntniss des eigentlich absolut wahren Werthes von A werden wir sodann jenen als wahren Werth anzusehen haben.

Hieraus folgt nun, dass derjenige Werth von z, den die Gleichung

$$\frac{dP}{dz}=0, \text{ d. h. } \frac{d}{dz}\left[f(z-a_1)\,f(z-a_1)\ldots f(z-a_n)\right]=0,$$

die das Maximum von P bestimmt, liefert, der wahrscheinlichst richtige Werth von A sein wird*). Diese Gleichung giebt

$$f(z-a_2)\ldots f(z-a_n)f'(z-a_1)+f(z-a_1)f(z-a_3)\ldots f(z-a_n)f'(z-a_2)+\ldots \\ +f(z-a_1)\ldots f(z-a_{n-1})f'(z-a_n)=0,$$

oder wenn man durch $f(z-a_1)\ldots f(z-a_n)$ dividirt:

$$\frac{f'(z-a_1)}{f(z-a_1)}+\frac{f'(z-a_2)}{f(z-a_2)}+\ldots+\frac{f'(z-a_n)}{f(z-a_n)}=0. \quad (1)$$

Ist $\dfrac{f'(z-a_1)}{f(z-a_1)}=F(z-a_1)$, d. h. eine bestimmte Function von $z-a_1$, so kann man offenbar die Gleichung (1) auch schreiben

$$F(z-a_1)+F(z-a_2)+F(z-a_3)+\ldots+F(z-a_n)=0, \quad (1')$$

aus der nun z zu bestimmen ist.

---

*) Man kann zu demselben Ergebniss auch auf folgendem Wege gelangen: Der wahre Werth von A (d. h. z) ist unbekannt; n Beobachtungsfehler sind gemacht worden, deren Werthe freilich andere sein werden, je nachdem ein anderer Werth von z gewählt wird; P ist die zum Voraus berechnete Wahrscheinlichkeit des Eintreffens der n Fehler $z-a_1, \ldots, z-a_n$, wenn z der wahre Werth von A ist; in der Unmöglichkeit, in der wir uns befinden, über jenen wahren Werth zu entscheiden, werden wir uns damit behelfen, dass wir den Werth von z wählen, für den die Wahrscheinlichkeit des Erscheinens von n Beobachtungsfehlern die grösste ist, was unmittelbar zu obiger Gleichung führt.

Wir haben aber angenommen, es seien alle gemachten n Beobachtungen gleich gut; in diesem Falle nun müssen wir voraussetzen, dass unter den Beobachtungsfehlern ebenso viele positive als negative seien, eine Annahme, die um so gerechtfertigter sein wird, je grösser n ist; zudem müssen wir noch voraussetzen, dass je gleich grosse positive und negative Beobachtungsfehler vorhanden seien. Genauer gesprochen kommt dies darauf hinaus, anzunehmen, es sei die Summe der n Beobachtungsfehler gleich Null, d. h, man habe

$$z-a_1+z-a_2+\ldots+z-a_n=0, \text{ d. h. } z=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}, \quad (2)$$

mit anderen Worten, man nehme das arithmetische Mittel aus den n gleich guten Beobachtungswerthen als den zulässigsten Werth der beobachteten Grösse an. Diese Annahme ist eine so natürliche, dass sie von längst her gemacht wurde, ehe man nur an die Methode der kleinsten Quadratsummen dachte, und sie empfiehlt sich so unmittelbar, dass wir eine jede andere Methode, die nicht auf dieselbe zurückweisen würde, verwerfen würden. Es darf also die Gleichung (1′) keinen anderen Werth von z liefern, als ihn die Gleichung (2) auch giebt, was uns auf eine nähere Bestimmung der Function F führen muss. Es werden nämlich die Gleichungen (1′) und (2) zusammenstimmen, wenn $F(z-a_1)=k(z-a_1)$, d. h. wenn $F(x)=kx$ ist. In diesem Falle giebt nämlich (1′):

$$k(z-a_1)+k(z-a_2)+\cdots+k(z-a_n)=0,$$

welche Gleichung, nach Entfernung des Factors k, mit (2) zusammenfällt. Hiedurch ist nun $F(x)$ als Function von x vollkommen bestimmt, da man offenbar nur eine einzige Form für jene Function erhalten kann. Da aber $F(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$, so ist

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=kx, \text{ d. h. } \frac{dlf(x)}{dx}=kx,\ lf(x)=k\int x\,dx=\frac{kx^2}{2}+k',$$

wo k und k' Constanten sind: Daraus folgt

$$f(x)=e^{\frac{1}{2}kx^2}e^{k'}=ce^{\frac{1}{2}kx^2},$$

wenn wir $e^{k'}$ durch c bezeichnen. Jetzt ist

$$P = f(z-a_1)\,f(z-a_2)\ldots f(z-a_n) = c^n e^{\frac{1}{2}k[(z-a_1)^2+(z-a_2)^2+\cdots+(z-a_n)^2]}$$

$$\frac{dP}{dz} = kP[(z-a_1)+(z-a_2)+\cdots+(z-a_n)],$$

$$\frac{d^2P}{dz^2} = k^2P[z-a_1+z-a_2+\cdots+z-a_n]^2+nkP,$$

und für $z = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$, wird $\dfrac{dP}{dz}$ zu Null, während $\dfrac{d^2P}{dz^2}$ zu nkP' wird, wo P' den Werth von P bedeutet, den man erhält, wenn man $z = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ setzt. Da dieser Werth positiv ist, ferner aber $\dfrac{d^2P}{dz^2}$ negativ sein muss, wenn P ein Maximum sein soll, so folgt hieraus, dass k nothwendig negativ ist. Setzen wir also $k = -2h^2$, so haben wir schliesslich

$$f(x) = ce^{-h^2x^2}, \qquad (3)$$

wodurch nun die erste Aufgabe gelöst ist. Diese Function drückt also die Wahrscheinlichkeit aus, bei einer Beobachtung einen Fehler vom Werthe x zu begehen. Sie genügt allen gemachten Anforderungen. Für positive und negative x hat sie denselben Werth, sie nimmt sehr rasch ab mit wachsendem x und hat ihren grössten Werth für $x = 0$. Die Grössen c und h hängen von x nicht ab, sondern sind bestimmte Constanten, die von der Art der Beobachtung abhängen. Setzt man $x = 0$, so ist $f(x) = c$, und es ist also c die Wahrscheinlichkeit, einen Beobachtungsfehler $= 0$ zu begehen. Bei derjenigen Beobachtungsweise, der ein bestimmter Werth von h zukommt, wird also die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 0 zu begehen, zu der einen Fehler x zu begehen, sich verhalten, wie c zu $ce^{-h^2x^2}$, d. h. wie 1 zu $e^{-h^2x^2}$; je grösser nun h ist, desto kleiner ist das letzte Glied, desto geringer ist also die Wahrscheinlichkeit, grössere Fehler zu begehen, im Verhältniss zu Beobachtungsfehlern $= 0$; desto besser also wird auch die Beobachtungs**methode** sein. Daraus folgt, dass h als Maass für die **Genauigkeit** der **Beobachtungsweise** dienen kann. Je besser letztere, desto grösser ist h.

§. 2.

Bestimmung der Constanten c. Wahrscheinlichkeit, dass ein begangener Fehler zwischen gegebenen Gränzen liege. Tafel des Integrals $\int_0^\alpha e^{-z^2}\,dz$. Wahrscheinlicher Fehler.

Wir haben gesehen, dass bei einer Beobachtungsweise, deren Maass der Genauigkeit h ist, die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler v begangen zu haben, ist $c\,e^{-h^2v^2}$; demnach ist (Einleitung IV.) die Wahrscheinlichkeit, entweder den Fehler v_1, oder v_2, oder $v_3, \ldots$ begangen zu haben, gleich

$$c\left[e^{-h^2v_1^2} + e^{-h^2v_2^2} + e^{-h^2v_3^2} + \cdots\right],$$

da c und h von v unabhängig sind. Sind also $v_1, v_2, v_3, \ldots$ unmittelbar auf einander folgende Werthe, deren Unterschiede unendlich klein sind, und ist v_1 der erste, v_n der letzte dieser Werthe, so folgt hieraus, dass die Wahrscheinlichkeit, es liege der begangene Fehler zwischen v_1 und v_n, ist

$$c\left[e^{-h^2v_1^2} + e^{-h^2v_2^2} + \cdots + e^{-h^2v_n^2}\right],$$

welche Grösse wir durch $c\sum\limits_{v_1}^{v_n} e^{-h^2v^2}$ bezeichnen wollen, wo das Zeichen $\sum\limits_{v_1}^{v_n} e^{-h^2v^2}$ bedeutet, man solle die Summe all der Werthe nehmen, die man bekommt, wenn man in $e^{-h^2v^2}$ der Grösse v alle möglichen Werthe beilegt, die von $v = v_1$ bis $v = v_n$ liegen. Ist aber ε der unendlich kleine Unterschied je zweier solcher auf einander folgender Werthe, den wir als sich gleich bleibend ansehen wollen, so ist bekanntlich:

$$\varepsilon \sum_{v_1}^{v_n} e^{-h^2v^2} = \int_{v_1}^{v_n} e^{-h^2v^2}\,dv, \text{ also } \sum_{v_1}^{v_n} e^{-h^2v^2} = \frac{1}{\varepsilon}\int_{v_1}^{v_n} e^{-h^2v^2}\,dv.$$

Daraus folgt nun, dass die Wahrscheinlichkeit, der bei einer Beobachtung gemachte Fehler liege zwischen v_1 und v_n, ist

$$\frac{c}{\varepsilon}\int_{v_1}^{v_n} e^{-h^2v^2}\,dv.$$

Ganz gewiss liegt er zwischen den Gränzen $-\infty$ und $+\infty$; demnach muss nothwendig

$$\frac{c}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 v^2}\,dv = 1, \quad c = \frac{\varepsilon}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 v^2}\,dv},$$

sein. Aber es ist $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2 v^2}\,dv = \frac{\sqrt{\pi}}{h}$, also hat man $c = \frac{h\varepsilon}{\sqrt{\pi}}$, und endlich

$$f(x) = \frac{h\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2 x^2}. \qquad (3')$$

Ferner ist die Wahrscheinlichkeit, der bei einer Beobachtung begangene Fehler liege zwischen den Werthen α und β, gleich

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{\alpha}^{\beta} e^{-h^2 x^2}\,dx; \qquad (4)$$

die, dass er zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$ liege:

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-h^2 x^2}\,dx = \frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\alpha} e^{-h^2 x^2}\,dx. \qquad (4')$$

Man ersieht hieraus, dass die Ermittelung dieser Wahrscheinlichkeit auf die des bestimmten Integrals (4) zurückkommt. Sind dabei α und β:

beide positiv, so ist $\int_{\alpha}^{\beta} e^{-h^2 x^2}\,dx = \int_{0}^{\beta} e^{-h^2 x^2}\,dx - \int_{0}^{\alpha} e^{-h^2 x^2}\,dx$,

$\alpha < 0,\ \beta > 0$, „ „ $\int_{-\alpha}^{\beta} e^{-h^2 x^2}\,dx = \int_{0}^{\beta} e^{-h^2 x^2}\,dx - \int_{0}^{-\alpha} e^{-h^2 x^2}\,dx$

$$= \int_{0}^{\beta} e^{-h^2 x^2}\,dx + \int_{0}^{\alpha} e^{-h^2 x^2}\,dx,$$

$\alpha < 0,\ \beta < 0$, „ „ $\int_{-\alpha}^{-\beta} e^{-h^2 x^2}\,dx = \int_{\beta}^{\alpha} e^{-h^2 x^2}\,dx = \int_{0}^{\alpha} e^{-h^2 x^2}\,dx - \int_{0}^{\beta} e^{-h^2 x^2}\,dx$,

so dass es offenbar genügt, die Werthe des bestimmten Integrals $\int_{0}^{\alpha} e^{-h^2 x^2}\,dx$ zu bestimmen. Setzt man hier $hx = z$, also $h\frac{dx}{dz} = 1$, so ist

$$\int_0^a e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{1}{h}\int_0^{ah} e^{-z^2}\,dz,\quad \frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_0^a e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah} e^{-z^2}\,dz,$$

und ebenso

$$\frac{h}{\sqrt{\pi}}\int_{-a}^{+a} e^{-h^2x^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah} e^{-z^2}\,dz,$$

welch letztere Grösse die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, der begangene Fehler liege zwischen $-a$ und $+a$, d. h. sein absoluter Werth übersteige nicht die Grösse a.

Von $ah = 0$ bis $ah = 2$ giebt die folgende, dem „Berliner astronomischen Jahrbuche für 1834" entnommene Tafel die Werthe des Integrals $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ah} e^{-z^2}\,dz$.

$ah=$		$ah=$		$ah=$		$ah=$		$ah=$	
0,00	0,00000	0,42	0,44747	0,84	0,76514	1,26	0,92523	1,68	0,98249
0,02	02256	0,44	46622	0,86	77610	1,28	92973	1,70	98379
0,04	04511	0,46	48465	0,88	78669	1,30	93401	1,72	98500
0,06	06762	0,48	50275	0,90	79691	1,32	93806	1,74	98613
0,08	09008	0,50	52050	0,92	80677	1,34	94191	1,76	98719
0,10	11246	0,52	53790	0,94	81627	1,36	94556	1,78	98817
0,12	13476	0,54	55494	0,96	82542	1,38	94902	1,80	98909
0,14	15695	0,56	57161	0,98	83423	1,40	95228	1,82	98994
0,16	17901	0,58	58792	1,00	84270	1,42	95537	1,84	99073
0,18	20093	0,60	60386	1,02	85084	1,44	95830	1,86	99147
0,20	22270	0,62	61941	1,04	85865	1,46	96105	1,88	99216
0,22	24429	0,64	63458	1,06	86614	1,48	96365	1,90	99279
0,24	26570	0,66	64938	1,08	87333	1,50	96610	1,92	99338
0,26	28690	0,68	66378	1,10	88020	1,52	96841	1,94	99392
0,28	30788	0,70	67780	1,12	88679	1,54	97058	1,96	99443
0,30	32863	0,72	69143	1,14	89308	1,56	97263	1,98	99489
0,32	34912	0,74	70468	1,16	89910	1,58	97455	2,00	99532
0,34	36936	0,76	71754	1,18	90484	1,60	97635		
0,36	38933	0,78	73001	1,20	91031	1,62	97804		
0,38	40901	0,80	74210	1,22	91553	1,64	97962		
0,40	42839	0,82	75381	1,24	92050	1,66	98110		

Was nun die Benutzung dieser Tafel anbelangt, so wird ein Beispiel sie klar machen. Da für $ah = 1{,}06$, der Werth $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{ah} e^{-z^2}\,dz = 0{,}86614$, so ist also die Wahrscheinlichkeit, der begangene Fehler sei seinem absoluten Werthe nach nicht grösser als $\frac{1{,}06}{h}$, gleich 0,86614, oder mit anderen Worten, bei 100000 gemachten gleich guten Beobachtungen derselben Grösse wird man darauf zählen dürfen, dass für 86614 derselben der Fehler nicht über $\frac{1{,}06}{h}$ hinausgehe.

Sucht man, mittelst Interpolation, den Werth von ah, für den $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{ah} e^{-z^2}\,dz = 0{,}5\left(=\frac{1}{2}\right)$, so ergiebt sich $ah = 0{,}47694$, welchen Werth wir künftig durch ϱ bezeichnen wollen. Daraus folgt also, die Wahrscheinlichkeit, der Fehler liege zwischen $-\frac{\varrho}{h}$ und $+\frac{\varrho}{h}$, sei $\frac{1}{2}$, d. h. unter sehr vielen Beobachtungen wird man die Hälfte haben, deren Fehler kleiner als $\frac{\varrho}{h}$, und die andere Hälfte, für die er grösser als $\frac{\varrho}{h}$. Man heisst deshalb die Grösse $\frac{\varrho}{h}$ den wahrscheinlichen Fehler der Beobachtungsweise; bezeichnet man ihn mit r, so ist

$$rh = \varrho \; (= 0{,}47694). \qquad (5)$$

§. 3.

Wahrscheinlichste Werthe der Unbekannten, wenn mehr Gleichungen als Unbekannte gegeben sind. Gewicht der Beobachtungen.

Gesetzt es seien $x, y, z, \ldots$ der Anzahl nach n Unbekannte und es sei

$$ax + by + cz + \cdots = F$$

eine durch Beobachtung zu bestimmende Grösse, so dass etwa gefunden werde:

$$\begin{aligned} \text{für } a &= a_1,\ b = b_1, \ldots : F = F_1, \\ \text{„ } a &= a_2,\ b = b_2, \ldots : F = F_2, \\ &\vdots \\ \text{„ } a &= a_m,\ b = b_m, \ldots : F = F_m, \end{aligned}$$

man also haben wird:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots &= F_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots &= F_2, \\ &\vdots \\ a_m x + b_m y + c_m z + \cdots &= F_m, \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

in welchen Gleichungen $m > n$ vorausgesetzt wird; ferner a_1, b_1, c_1, ..., ..., a_m, b_m, c_m, ... als genau bekannt angesehen werden, während F_1, F_2, F_3, ..., F_m durch unmittelbare Beobachtung gegeben sein müssen: so soll nun aus den Gleichungen (6) das wahrscheinlichste System der Werthe von x, y, z, ... ermittelt werden.

Wir haben allerdings vorausgesetzt, es stammen die Gleichungen (6) gewissermaassen aus derselben Quelle; dies ist jedoch ganz gleichgültig. Wenn nur die so eben genannten Bedingungen erfüllt sind, so mag es uns einerlei sein, woher diese Gleichungen kommen. Wäre $m = n$, so wären die Gleichungen (6) in derselben Anzahl wie die Unbekannten, und würden also zur Bestimmung der letzteren geradezu hinreichen. Dies setzen wir nicht voraus, sondern nehmen an, es seien mehr der Gleichungen (6) vorhanden als Unbekannte. Wären nun die Werthe $F_1, F_2, \ldots, F_m$ sämmtlich genau, d. h. fehlerfrei bestimmt, so würden, wenn man x, y, z, ... aus den n ersten bestimmte, die übrigen durch Einsetzen dieser Werthe erfüllt sein müssen. Wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler wird dies aber nicht der Fall sein, und daher entsteht die Frage, wie man — nicht die genauen Werthe von x, y, z, ... — wohl aber die wahrscheinlichsten finden könne.

Seien nun h_1, h_2, ..., h_m die Maasse der Genauigkeit, wie sie den Beobachtungsweisen, die F_1, F_2, ..., F_m ergeben haben, entsprechen (§. 2); v_1, v_2, ..., v_m die hiebei begangenen Beobachtungsfehler; ε_1, ε_2, ..., ε_m unendlich kleine Grössen: so sind die Wahrscheinlichkeiten, die Fehler v_1, ..., v_m zu begehen,

wenn man diese Wahrscheinlichkeiten zum Voraus berechnet (§. 2):

$$\frac{h_1 \varepsilon_1}{\sqrt{\pi}} e^{-h_1^2 v_1^2}, \quad \frac{h_2 \varepsilon_2}{\sqrt{\pi}} e^{-h_2^2 v_2^2}, \ldots, \frac{h_m \varepsilon_m}{\sqrt{\pi}} e^{-h_m^2 v_m^2},$$

mithin die Wahrscheinlichkeit, sie alle zugleich zu begehen (zum Voraus berechnet) (Einl. V.):

$$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m h_1 h_2 \ldots, h_m}{\sqrt{\pi^m}} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_m^2 v_m^2)}. \qquad (7)$$

Was nun aber $v_1, \ldots, v_m$ anbelangt, so sind diese Grössen gegeben durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots - F_1, \\ v_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots - F_2, \\ &\vdots \\ v_m &= a_m x + b_m y + c_m z + \cdots - F_m, \end{aligned}\right\} \quad (6')$$

wenn man sich unter $x, y, z, \ldots$ die wahren Werthe dieser Unbekannten denkt. Welches diese wahren Werthe sind, weiss man nicht, und muss eben deshalb theoretisch alle möglichen Werthe als zulässig erklären. Je nachdem man also für $x, y, z, \ldots$ ein anderes System von Werthen annimmt, erhält man auch ein anderes System von Fehlern $v_1, \ldots, v_m$, so dass eine jede solche Annahme als eine Ursache anzusehen ist, aus der als Wirkung ein gewisses Fehlersystem fliesst. Ein System von m Beobachtungsfehlern ist eingetroffen, und in der Unmöglichkeit, die wahre Ursache, d. h. das wahre System von Werthen von $x, y, z, \ldots$ zu finden, werden wir diejenige wählen, die die grösste Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Denken wir uns nun unter $x, y, z, \ldots$ irgend ein beliebiges aller möglichen Systeme von Werthen dieser Grössen, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass gerade dieses das rechte ist, nach Einleitung VI.:

$$\frac{\dfrac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m h_1 h_2 \ldots h_m}{\sqrt{\pi^m}} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_m^2 v_m^2)}}{\sum\sum \ldots \dfrac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m h_1 h_2 \ldots h_m}{\sqrt{\pi^m}} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_m^2 v_m^2)}},$$

worin das Zeichen $\Sigma\Sigma \ldots$ bedeutet, man solle in $e^{-(h_1^2 v_1^2 + \ldots + h_m^2 v_m^2)}$ den Grössen $v_1, \ldots v_m$ alle möglichen Werthe beilegen, die sie haben können, wenn $x, y, z, \ldots$ von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen, und

die offenbar auch zwischen $-\infty$ und $+\infty$ schwanken, wobei wir etwa die Werthe von v_1 so ordnen, dass sie um die unendlich kleine Grösse ε_1, die von v_2 um $\varepsilon_2, \ldots$ wachsen. Lässt man im Zähler und Nenner den gemeinschaftlichen Factor $\frac{h_1 \ldots h_m}{\sqrt{\pi^m}}$ weg, beachtet, dass

$$\Sigma\Sigma \ldots e^{-(h_1 v_1^2 + \ldots + h_m^2 v_m^2)} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_m = \int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \ldots e^{-(h_1 v_1^2 + \ldots + h_2^2 v_m^2)} dv_1 \ldots dv_m,$$

d. h. eine bestimmte unveränderliche Grösse ist, die wir mit A bezeichnen wollen, so ist also die Wahrscheinlichkeit, eines der möglichen Systeme von Werthen für $x, y, z, \ldots$ sei das rechte, gleich

$$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m}{A} e^{-(h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \ldots + h_m^2 v_m^2)}.$$

Daraus folgt, dass wir dasjenige dieser Systeme als das wahrscheinlichst rechte, oder kurzweg wahrscheinlichste, zu wählen haben, für welches diese Grösse ein Maximum ist. Sie ist es aber, wenn

$$h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \cdots + h_m^2 v_m^2 \tag{8}$$

ein Minimum ist, wo $v_1, v_2, \ldots, v_m$ durch (6′) gegeben sind.

Daraus folgt endlich, dass man für $x, y, z, \ldots$ diejenigen Werthe zu wählen hat, die die Grösse (8) zu einem Minimum machen. Daher rührt nun der Name der kleinsten Quadratsummen.

Nach der Lehre von den Maxima und Minima müssen nun die partiellen Differentialquotienten nach $x, y, z, \ldots$ der Grösse (8) Null gesetzt werden. Da aber die (8) ist:

$$h_1^2(a_1 x + b_1 y + c_1 z + \cdots - F_1)^2 + h_2^2(a_2 x + b_2 y + c_2 z + \cdots - F_2)^2 + \cdots$$
$$+ h_m^2(a_m x + b_m y + c_m z + \cdots - F_m)^2,$$

so folgt hieraus, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\left.\begin{aligned}
h_1^2 a_1^2 + h_2^2 a_2^2 + \cdots + h_m^2 a_m^2 &= [h^2 a^2],\\
h_1^2 b_1^2 + h_2^2 b_2^2 + \cdots + h_m^2 b_m^2 &= [h^2 b^2],\\
&\vdots\\
h_1^2 a_1 b_1 + h_2^2 a_2 b_2 + \cdots + h_m^2 a_m b_m &= [h^2 ab],\\
h_1^2 a_1 c_1 + h_2^2 a_2 c_2 + \cdots + h_m^2 a_m c_m &= [h^2 ac],\\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

und nun die (8) nach $x, y, z, \ldots$ differenzirt:

$$\left.\begin{array}{l}[h^2a^2]\,x + [h^2ab]\,y + [h^2ac]\,z + \cdots = [h^2aF],\\ [h^2ab]\,x + [h^2b^2]\,y + [h^2bc]\,z + \cdots = [h^2bF],\\ [h^2ac]\,x + [h^2bc]\,y + [h^2c^2]\,z + \cdots = [h^2cF],\\ \vdots\end{array}\right\}\quad(10)$$

welche Gleichungen in derselben Anzahl vorhanden sind, wie die Unbekannten $x, y, z, \ldots$. Die Coëfficienten wiederholen sich in eigenthümlicher Weise. So sind die der ersten Horizontal- und Verticalreihe gleich u. s. w.

Gesetzt die Beobachtungsweisen, die $F_1, F_2, \ldots, F_m$ gegeben haben, seien alle gleich gut, so hat man $h_1 = h_2 = \cdots = h_m$, so dass man in (10) diese Grössen weglassen kann und also bloss hat:

$$\left.\begin{array}{l}[a^2]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \cdots = [aF],\\ [ab]\,x + [b^2]\,y + [bc]\,z + \cdots = [bF],\\ [ac]\,x + [bc]\,y + [c^2]\,z + \cdots = [cF],\\ \vdots\end{array}\right\}\quad(10')$$

Denken wir uns nun gewisse Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_m$ so bestimmt, dass

$$g_1 : g_2 : \ldots : g_m = h_1{}^2 : h_2{}^2 : \ldots : h_m{}^2, \qquad (10'')$$

so ist

$$h_2{}^2 = \frac{g_2}{g_1} h_1{}^2,\quad h_3{}^2 = \frac{g_3}{g_1} h_1{}^2,\ \ldots,\quad h_m{}^2 = \frac{g_m}{g_1} h_1{}^2;$$

setzt man diese Werthe in (10) ein, lässt den jetzt gemeinschaftlichen Factor $h_1{}^2$ weg und multiplicirt Alles mit g_1, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}[ga^2]\,x + [gab]\,y + [gac]\,z + \cdots = [gaF],\\ [gab]\,x + [gb^2]\,y + [gbc]\,z + \cdots = [gbF],\\ [gac]\,x + [gbc]\,y + [gc^2]\,z + \cdots = [gcF],\\ \vdots\end{array}\right\}\quad(11)$$

Sind nun $g_1, g_2, \ldots, g_m$ ganze (immer positive) Zahlen, so kann man diesen Gleichungen eine andere Auslegung geben. Gesetzt nämlich, man denke sich die erste der Gleichungen (6) g_1 mal, die zweite g_2 mal, ..., die letzte g_m mal geschrieben, d. h. man denke sich $g_1 + g_2 + \cdots + g_m$ Beobachtungen gemacht, wovon die ersten g_1 alle F_1, die anderen g_2 alle F_2, u. s. w. gegeben haben, betrachte dann alle $g_1 + g_2 + \cdots + g_m$ Beobachtungen als gleich genau, so müsste man $x, y, z, \ldots$ nach dem Gleichungsschema (10′) bestimmen. Darin würde alsdann die

Grösse $[a^2]$ offenbar gleich sein g_1 mal a_1^2, g_2 mal $a_2^2, \ldots$ bis g_m mal a_m^2, d. h. gleich $[g a^2]$ in (11); ebenso $[ab]$ wäre gleich $[g a b]$ in (11) u. s. w., so dass man dieselben Gleichungen bekäme wie (11). Da diese nun richtig sind, so kann man sich die Sache auch so vorstellen:

Bestimmt man $g_1, g_2, \ldots, g_m$ als ganze Zahlen aus (10″), was immer möglich ist, so ist es dasselbe, als wenn man sagen würde, die Beobachtung, die F_1 gegeben hat, ist g_1; die, welche F_2 gegeben hat, $g_2, \ldots$; die, welche F_m gegeben hat, ist g_m mal zu zählen. Daher rührt es dann, dass man $g_1, g_2, \ldots, g_m$ die Gewichte der verschiedenen Beobachtungsweisen nennt. Eine Beobachtung vom Gewichte 10 ist gleich zu achten zehn Beobachtungen vom Gewichte 1, d. h. wenn man lauter Beobachtungen vom Gewichte 1 einführen, also nach (10′) rechnen wollte, müsste man in (6) die dem Gewichte 10 entsprechende Gleichung zehnmal schreiben.

Ist H das Maass der Genauigkeit der Beobachtungsweise vom Gewichte 1, R ihr wahrscheinlicher Fehler; $h_1, h_2, \ldots, h_m$ wie oben; $r_1, r_2, \ldots, r_m$ die zukommenden wahrscheinlichen Fehler, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} 1 : g_1 : g_2 : \ldots : g_m = H^2 : h_1^2 : h_2^2 : \ldots : h_m^2, \\ HR = \varrho, \quad h_1 r_1 = \varrho, \quad h_2 r_2 = \varrho, \ldots, \quad h_m r_m = \varrho \end{array}\right\} \quad (12)$$

also auch

$$h_1^2 = g_1 H^2, \quad h_2^2 = g_2 H^2, \ldots, \quad h_m^2 = g_m H^2;$$
$$r_1^2 = \frac{R^2}{g_1}, \quad r_2^2 = \frac{R^2}{g_2}, \ldots, \quad r_m^2 = \frac{R^2}{g_m}. \quad (12')$$

Die Zahlen $h_1, \ldots, h_m$ sind absolute Zahlen, während $g_1, \ldots, g_m$ relativ sind; mit anderen Worten, es ist gleichgültig, welche Beobachtungsweise man als die vom Gewichte 1 annehmen will; einmal gewählt, bleibt sie natürlich. Eine nähere Bestimmung bleibt dem Folgenden vorbehalten.

§. 4.

Fall nicht linearer Gleichungen. Bedingungsgleichungen. Arithmetisches Mittel.

Wir haben im Vorstehenden vorausgesetzt, die Gleichungen (6) seien in Bezug auf $x, y, z, \ldots$ von der ersten Ordnung,

oder hätten, wie man zu sagen pflegt, die **lineare Form.** Ist dies nicht der Fall, so kann man durch einen einfachen Kunstgriff dieselbe herstellen. Seien nämlich allgemein die m Gleichungen (6) von folgender Form:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1(x, y, z, \ldots, a_1, b_1, c_1, \ldots) = F_1, \\ &\varphi_2(x, y, z, \ldots, a_2, b_2, c_2, \ldots) = F_2, \\ &\qquad\vdots \\ &\varphi_m(x, y, z, \ldots, a_m, b_m, c_m, \ldots) = F_m, \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

worin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ irgend welche Functionen der beigesetzten Grössen bedeuten, und $F_1, F_2, \ldots, F_m$ wie früher durch unmittelbare Beobachtung gefunden sind.

Man wähle nun n beliebige der Gleichungen (13) aus und bestimme aus ihnen die Werthe von $x, y, z, \ldots$, welche wir durch $x_1, y_1, z_1, \ldots$ bezeichnen wollen, so werden diese, statt $x, y, z, \ldots$ in die übrigen $m-n$ Gleichungen gesetzt, diesen zwar im Allgemeinen nicht geradezu genügen, doch, da wir die Beobachtungen möglichst genau voraussetzen, werden bedeutende Aenderungen jener Werthe nicht nöthig sein, um jenen Gleichungen zu genügen. Man setze also

$$x = x_1 + x', \quad y = y_1 + y', \quad z = z_1 + z', \ldots, \quad (14)$$

so werden $x', y', z', \ldots$ im Allgemeinen Grössen sein, deren Producte und höhere Potenzen man vernachlässigen kann. Daraus folgt nach dem Taylor'schen Satze, dass

$$\varphi_1(x_1+x', y_1+y', z_1+z', \ldots) = \varphi_1(x_1, y_1, z_1, \ldots) + \frac{d\varphi_1}{dx}x' + \frac{d\varphi_1}{dy}y' + \frac{d\varphi_1}{dz}z' + \cdots,$$

$$\varphi_2(x_1+x', y_1+y', z_1+z', \ldots) = \varphi_2(x_1, y_1, z_1, \ldots) + \frac{d\varphi_2}{dx}x' + \frac{d\varphi_2}{dy}y' + \frac{d\varphi_2}{dz}z' + \cdots,$$

$$\vdots$$

wenn man in den partiellen Differentialquotienten $x_1, y_1, z_1, \ldots$ für $x, y, z, \ldots$ setzt. Demnach werden die Gleichungen (13) zu:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1 + \frac{d\varphi_1}{dx}x' + \frac{d\varphi_1}{dy}y' + \frac{d\varphi_1}{dz}z' + \cdots = F_1, \\ &\varphi_2 + \frac{d\varphi_2}{dx}x' + \frac{d\varphi_2}{dy}y' + \frac{d\varphi_2}{dz}z' + \cdots = F_2, \\ &\qquad\vdots \\ &\varphi_m + \frac{d\varphi_m}{dx}x' + \frac{d\varphi_m}{dy}y' + \frac{d\varphi_m}{dz}z' + \cdots = F_m, \end{aligned}\right\} \quad (13')$$

wenn man, wie gebräuchlich, die ersten Seiten der Gleichungen (13) kurzweg mit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ bezeichnet und hier überall $x, y, z, \ldots$ durch $x_1, y_1, z_1, \ldots$ ersetzt. Diese Gleichungen treten nun an die Stelle von (6) und man übersieht leicht, wenn man die Ableitung des §. 3 nur nochmals durchgeht, dass jetzt an die Stelle von (11) treten:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[g\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dx}\right]x' + \left[g\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\right]y' + \left[g\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}\right]z' + \cdots \\
&\qquad\qquad = \left[g(F-\varphi)\frac{d\varphi}{dx}\right], \\
&\left[g\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\right]x' + \left[g\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dy}\right]y' + \left[g\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}\right]z' + \cdots \\
&\qquad\qquad = \left[g(F-\varphi)\frac{d\varphi}{dy}\right], \\
&\left[g\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}\right]x' + \left[g\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}\right]y' + \left[g\frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varphi}{dz}\right]z' + \cdots \\
&\qquad\qquad = \left[g(F-\varphi)\frac{d\varphi}{dz}\right], \\
&\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Hat man hieraus $x', y', z', \ldots$ bestimmt, so geben die (14) dann $x, y, z, \ldots$.

Es kann sich endlich ereignen, dass neben den Gleichungen (6) oder (13) noch gewisse Gleichungen gegeben sind, denen $x, y, z, \ldots$ genau genügen müssen. Solche seien etwa:

$$\psi_1(x,y,z,\ldots) = 0,\ \psi_2(x,y,z,\ldots) = 0, \ldots,\ \psi_r(x,y,z,\ldots) = 0, \quad (16)$$

der Anzahl nach r. Mittelst dieser Gleichungen könnte man r der Unbekannten durch die übrigen ausdrücken, ihre Werthe in (8) einsetzen und dann nach diesen bleibenden Unbekannten differenziren. Bequemer aber und immer leichter ist es, jede der Gleichungen (16) mit einem unbestimmten Factor $2k_1, 2k_2, \ldots, 2k_r$ zu multipliciren und dann die Grösse

$$h_1^2 v_1^2 + h_2^2 v_2^2 + \cdots + h_m^2 v_m^2 + 2k_1\psi_1 + 2k_2\psi_2 + \cdots + 2k_r\psi_r \quad (17)$$

nach jeder der Unbekannten $x, y, z, \ldots$ zu differenziren. Dadurch erhält man n Gleichungen, die in Verbindung mit den Gleichungen (16) zur Bestimmung der $n+r$ Unbekannten: $x, y, z, \ldots, k_1, k_2, \ldots, k_r$ dienen werden. Man erhält so

$$[a^2 g]\,x + [a\,b\,g]\,y + [a\,c\,g]\,z + \cdots + \left[k\,\frac{d\psi}{d\,x}\right] = [F\,a\,g],$$

$$[a\,b\,g]\,x + [b^2 g]\,y + [b\,c\,g]\,z + \cdots + \left[k\,\frac{d\psi}{d\,y}\right] = [F\,b\,g],$$

$$\vdots$$

zur Bestimmung von x, y, z, ... Haben die Gleichungen (16) nicht die lineare Form, so kann man dieselbe wie oben hervortreten lassen. Man bestimme aus n der Gleichungen (6) oder (13) die näherungsweise richtigen Werthe von x, y, z,... und nehme wieder die Gleichungen (14) an. Da die Gleichungen (6) in den allgemeineren (13) enthalten sind, so genügt es diese letzteren zu betrachten. Man hat nun die Grösse

$$\begin{aligned}
g_1 & \left[\frac{d\varphi_1}{d\,x}\,x' + \frac{d\varphi_1}{d\,y}\,y' + \frac{d\varphi_1}{d\,z}\,z' + \cdots + \varphi_1 - F_1\right]^2 \\
& + g_2\left[\frac{d\varphi_2}{d\,x}\,x' + \frac{d\varphi_2}{d\,y}\,y' + \frac{d\varphi_2}{d\,z}\,z' + \cdots + \varphi_2 - F_2\right]^2 + \cdots \\
& + g_m\left[\frac{d\varphi_m}{d\,x}\,x' + \frac{d\varphi_m}{d\,y}\,y' + \frac{d\varphi_m}{d\,z}\,z' + \cdots + \varphi_m - F_m\right]^2 \\
& + 2\,k_1\left[\frac{d\psi_1}{d\,x}\,x' + \frac{d\psi_1}{d\,y}\,y' + \frac{d\psi_1}{d\,z}\,z' + \cdots + \psi_1\right] + \cdots \\
& + 2\,k_r\left[\frac{d\psi_r}{d\,x}\,x' + \frac{d\psi_r}{d\,y}\,y' + \frac{d\psi_r}{d\,z}\,z' + \cdots + \psi_r\right]
\end{aligned}$$

nach x', y', z',... zu differenziren und die Differentialquotienten Null zu setzen. Daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}
& \left[g\,\frac{d\varphi}{d\,x}\,\frac{d\varphi}{d\,x}\right]x' + \left[g\,\frac{d\varphi}{d\,x}\,\frac{d\varphi}{d\,y}\right]y' + \left[g\,\frac{d\varphi}{d\,x}\,\frac{d\varphi}{d\,z}\right]z' + \cdots \\
& \qquad + \left[k\,\frac{d\psi}{d\,x}\right] + \left[(\varphi - F)\,g\,\frac{d\varphi}{d\,x}\right] = 0, \\
& \left[g\,\frac{d\varphi}{d\,x}\,\frac{d\varphi}{d\,y}\right]x' + \left[g\,\frac{d\varphi}{d\,y}\,\frac{d\varphi}{d\,y}\right]y' + \left[g\,\frac{d\varphi}{d\,y}\,\frac{d\varphi}{d\,z}\right]z' + \cdots \\
& \qquad + \left[k\,\frac{d\psi}{d\,y}\right] + \left[(\varphi - F)\,g\,\frac{d\varphi}{d\,y}\right] = 0, \\
& \left[g\,\frac{d\varphi}{d\,x}\,\frac{d\varphi}{d\,z}\right]x' + \left[g\,\frac{d\varphi}{d\,y}\,\frac{d\varphi}{d\,z}\right]y' + \left[g\,\frac{d\varphi}{d\,z}\,\frac{d\varphi}{d\,z}\right]z' + \cdots \\
& \qquad + \left[k\,\frac{d\psi}{d\,z}\right] + \left[(\varphi - F)\,g\,\frac{d\varphi}{d\,z}\right] = 0, \\
& \qquad\qquad \vdots
\end{aligned}\right\} \quad (18)$$

wo in $\varphi_1, \ldots, \varphi_m, \psi_1, \ldots, \psi_r$ und den Differentialquotienten dieser Grössen überall $x, y, z, \ldots$ durch $x_1, y_1, z_1, \ldots$ zu ersetzen sind. Die Gleichungen (18) in Verbindung mit

$$\left.\begin{aligned}
\psi_1 + \frac{d\psi_1}{dx}x' + \frac{d\psi_1}{dy}y' + \frac{d\psi_1}{dz}z' + \cdots &= 0, \\
\psi_2 + \frac{d\psi_2}{dx}x' + \frac{d\psi_2}{dy}y' + \frac{d\psi_2}{dz}z' + \cdots &= 0, \\
&\vdots \\
\psi_r + \frac{d\psi_r}{dx}x' + \frac{d\psi_r}{dy}y' + \frac{d\psi_r}{dz}z' + \cdots &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (19)$$

dienen zur Bestimmung von $x', y', z', \ldots, k_1, k_2, \ldots, k_r$.

Sind alle Beobachtungen gleich genau, so sind alle g einander gleich (§. 3). Hat man eine einzige Grösse durch directe Beobachtungen zu ermitteln, und sind $F_1, \ldots, F_m$ die für sie erhaltenen Werthe, so hat man für (6):

$$x = F_1, \quad x = F_2, \ldots, \quad x = F_m,$$

d. h. die sämmtlichen a sind 1, während alle anderen Constanten Null sind. Also ist

$$[ga^2] = g_1 + g_2 + \cdots + g_m, \; [gab] = 0, \; [gb^2] = 0, \ldots,$$
$$[gFa] = g_1 F_1 + g_2 F_2 + \cdots + g_m F_m,$$

so dass die (11) ist:

$$(g_1 + g_2 + \cdots + g_m)\, x = g_1 F_1 + g_2 F_2 + \cdots + g_m F_m,$$
$$x = \frac{g_1 F_1 + g_2 F_2 + \cdots + g_m F_m}{g_1 + g_2 + \cdots + g_m}. \quad (20)$$

Ist $g_1 = g_2 = \cdots = g_m$, so hat man hieraus

$$x = \frac{F_1 + F_2 + \cdots + F_m}{m}, \quad (20')$$

d. h. das arithmetische Mittel, wie natürlich, da wir dies in §. 1 vorausgesetzt. Ehe wir in unseren Untersuchungen weiterschreiten, wollen wir zunächst an einigen Beispielen zeigen, in welcher Weise die vorstehenden Lehren anzuwenden sind.

§. 5.

Beispiele zu dem Vorhergehenden.

I. Benzenberg's Versuche über die Abweichung frei fallender Körper nach Osten.

Die Resultate dieser Versuche entnehmen wir der Darstellung von Encke im „Berliner astronomischen Jahrbuche“ für 1834.

S. 285 ff. Die Fallhöhe war 262 pariser Fuss; die Resultate sind in pariser Linien angegeben; eine positive Zahl deutet auf östliche, eine negative auf westliche Abweichung. Die Versuche sind als gleich genau anzusehen.

Nr.		Nr.		Nr.		Nr.		Nr.	
1	− 3,0	7	+ 11,5	13	+ 13,5	19	+ 7,0	25	− 9,0
2	+ 12,0	8	− 4,0	14	+ 11,0	20	+ 7,5	26	− 10,0
3	+ 3,0	9	+ 2,0	15	+ 9,0	21	+ 6,0	27	+ 8,5
4	+ 13,0	10	+ 2,0	16	− 8,0	22	− 2,0	28	+ 10,0
5	+ 20,0	11	+ 12,0	17	+ 8,0	23	+ 11,0	29	+ 5,5
6	− 2,0	12	+ 7,0	18	+ 10,0	24	− 4,0		

Als wahrscheinlichsten Werth der östlichen Abweichung hat man hier das arithmetische Mittel aller 29 Resultate zu wählen. Die Summe der positiven Abweichungen ist 189,5, der negativen 42, also ist die östliche Abweichung $= \frac{189,5 - 42}{29} = 5,086$.

II. Bestimmung der Schneegränze als Function der Breite.

Kämtz (Meteorologie II, S. 173) nimmt an, es lasse sich die Höhe H der Schneegränze darstellen durch

$$H = A + B \cos^2 \varphi,$$

wo A und B zwei zu bestimmende Constanten und φ die geographische Breite ist. Er theilt zu dem Ende 10 Beobachtungen dieser Höhe unter eben so vielen Breiten mit, und berechnet daraus A und B. Vergleichen wir diese Aufgabe mit dem Früheren, so sind unsere F hier durch H, x durch A, y durch B ersetzt; sämmtliche a sind 1, die b sind $\cos^2 \varphi$. Dadurch erhält man nun leicht die folgende Tafel (wobei die Maasse in Toisen gegeben sind, und 1 Toise = 6 pariser Fuss, 1 pariser Fuss = 144 pariser Linien, 443,296 pariser Linien = 1 Meter):

Nr.	$\varphi =$	$F =$	$a =$	$b (\cos^2\varphi) =$	$a^2 =$	$ab =$	$aF =$	$b^2 =$	$bF =$
1	0° 0′	2475	1	1	1	1	2475	1	2475
2	19°24′	2336	1	0,88966	1	0,88966	2336	0,79146	2078,1
3	42°39′	1417	1	0,54097	1	0,54097	1417	0,29266	766,5
4	60° 0′	800	1	0,25000	1	0,25000	800	0,06250	200,0
5	62°15′	842	1	0,21680	1	0,21680	842	0,04700	182,5
6	67° 5′	517	1	0,15162	1	0,15162	517	0,02299	78,9
7	67°20′	500	1	0,14852	1	0,14851	500	0,02205	74,2
8	70° 0′	550	1	0,11697	1	0,11697	550	0,01368	64,3
9	70°38′	417	1	0,10996	1	0,10996	417	0,01209	45,8
10	71°10′	367	1	0,10421	1	0,10421	367	0,01061	38,2
					10	3,52870	10221	2,27504	6003,5

Demnach hat man zur Bestimmung von x und y:

$$10x + 3{,}52870y = 10221,$$

$$3{,}52870x + 2{,}27504y = 6003{,}5,$$

woraus

$$x = \frac{2{,}27504 \,.\, 10221 - 3{,}52870 \,.\, 6003{,}5}{10 \,.\, 2{,}27504 - 3{,}52870^2} = 197{,}19,$$

$$y = \frac{10 \,.\, 6003{,}5 - 3{,}52870 \,.\, 10221}{10 \,.\, 2{,}27504 - 3{,}52870^2} = 2337{,}06,$$

mithin

$$H = 197{,}19 + 2337{,}06 \cos^2\varphi.$$

III. Darstellung des specifischen Gewichts des legirten Silbers als Function seines Feingehalts.

Karmarsch hat Versuche gemacht, das specifische Gewicht S des mit Kupfer gemischten Silbers als Function seines Feingehalts α, letzterer ausgedrückt in Grän, von denen 288 auf die Mark gehen, darzustellen. Er nimmt an, es sei

$$S = A + B\alpha,$$

wo A und B zwei noch zu bestimmende Constanten (x und y), α der Feingehalt (für $\alpha = 286$ hiesse dies, in 288 Theilen Mischung sind 286 rein Silber), S das verlangte specifische Gewicht ist. In unserem Früheren sind die F durch S, die x und y durch

A und B ersetzt, alle a sind 1, die b gleich α, alle g einander gleich; demnach $ab = b$, $aF = F$, $a^2 = 1$. Die Versuche sind nun (entlehnt der Abhandlung von **Wittstein** in **Navier's** Differential- und Integralrechnung):

Nr.	$\alpha(=b)=$	$S(=F)=$	Nr.	$\alpha(=b)=$	$S(=F)=$	Nr.	$\alpha(=b)=$	$S(=F)=$
1	286	10,492	33	259,2	10,291	65	190	9,931
2	"	10,487	34	"	10,281	66	168	9,810
3	"	10,458	35	"	10,272	67	"	9,776
4	"	10,480	36	252	10,260	68	"	9,767
5	"	10,505	37	250	10,265	69	"	9,765
6	"	10,497	38	"	10,261	70	"	9,744
7	"	10,467	39	"	10,257	71	"	9,766
8	284	10,464	40	"	10,250	72	"	9,768
9	266,4	10,374	41	"	10,252	73	162	9,746
10	"	10,345	42	240	10,237	74	150	9,663
11	"	10,351	43	"	10,211	75	"	9,662
12	"	10,355	44	"	10,211	76	"	9,646
13	"	10,373	45	"	10,208	77	"	9,640
14	264	10,332	46	"	10,207	78	"	9,667
15	261	10,306	47	"	10,204	79	"	9,662
16	260	10,312	48	"	10,202	80	"	9,681
17	"	10,274	49	"	10,190	81	"	9,672
18	"	10,321	50	"	10,198	82	144	9,637
19	259,2	10,314	51	"	10,202	83	126	9,532
20	"	10,309	52	"	10,203	84	108	9,439
21	"	10,296	53	"	10,189	85	96	9,385
22	"	10,282	54	216	10,100	86	"	9,383
23	"	10,297	55	"	10,092	87	90	9,333
24	"	10,316	56	"	10,072	88	"	9,306
25	"	10,315	57	"	10,067	89	"	9,317
26	"	10,302	58	"	10,074	90	64	9,203
27	"	10,289	59	"	10,073	91	"	9,196
28	"	10,289	60	"	10,055	92	63	9,196
29	"	10,271	61	213	10,068	93	"	9,287
30	"	10,300	62	193	9,944	94	"	9,153
31	"	10,288	63	192	9,890	95	"	9,197
32	"	10,273	64	190	9,888			

Quadrirt man sämmtliche b und addirt die Quadrate, so erhält man $[b^2] = 4595195$, ebenso $[bF] = 202413{,}6$, während $[a^2] = 95$, $[ab] = [b] = 19959{,}4$, $[aF] = [F] = 952{,}388$, so dass

$$95\,x + 19959{,}4\,y = 952{,}388,$$
$$19959{,}4\,x + 4595195\,y = 202413{,}6.$$

Hieraus folgt

$$x = \frac{4595195\,.\,952{,}388 - 19959{,}4\,.\,202413{,}6}{95\,.\,4595195 - 19959{,}4^2} = 8{,}81297,$$

$$y = \frac{95\,.\,202413{,}6 - 19959{,}4\,.\,952{,}388}{95\,.\,4595195 - 19959{,}4^2} = 0{,}0057695,$$

und endlich

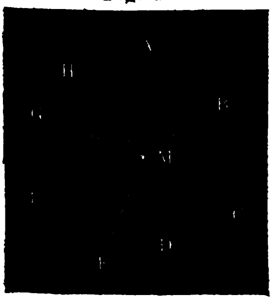
$$S = 8{,}81297 + 0{,}0057695\,\alpha.$$

IV. Ausgleichung von Winkeln um einen Punkt herum.

Es wurden im Punkte M (Fig. 1) gemessen (entnommen den „geographischen Bestimmungen im königl. preuss. Regierungsbezirk Minden von Vorländer“, S. 16):

AMB =	52°	14′	89,77″	mit	dem	Gewichte	40,
AME =	201	7	32,96	„	„	„	20,
AMH =	334	70	22,66	„	„	„	20,
BMC =	65	24	59,80	„	„	„	30,
BMD =	93	52	36,25	„	„	„	10,
CMD =	28	27	86,20	„	„	„	30,
DME =	55	40	02,30	„	„	„	30,
DMF =	68	08	96,72	„	„	„	30,
DMG =	100	73	55,94	„	„	„	20,
EMG =	45	33	54,76	„	„	„	40,
FMG =	32	64	40,76	„	„	„	25,
GMH =	88	29	59,62	„	„	„	50.

Fig. 1.



Die Winkel sind dabei in neuerer Theilung (1 rechter = 100°, 1° = 100′, 1′ = 100″) angegeben, die Gewichte den Repetitionszahlen proportional (vergl. §. 14).

Bezeichnen wir der Kürze wegen die zwölf gemessenen Winkel mit I, II,..., XII, so bestehen zwischen denselben folgende Gleichungen:

$$\mathrm{VI} = \mathrm{V} - \mathrm{IV},\quad \mathrm{VII} = \mathrm{II} - \mathrm{I} - \mathrm{V},\quad \mathrm{X} = \mathrm{IX} - \mathrm{VII},$$
$$\mathrm{XI} = \mathrm{IX} - \mathrm{VIII},\quad \mathrm{XII} = \mathrm{III} - \mathrm{II} - \mathrm{X}\,^{*}),$$

welche fünf Bedingungsgleichungen nothwendig sind, da in Wahrheit nur sieben verschiedene Winkel bestehen. Wir wollen nun als genäherte Werthe der zwölf Winkel I,..., XII die oben angegebenen Werthe wählen, und denselben Correctionen beifügen, die wir durch (1), (2), . . ., (12) bezeichnen wollen, so dass also etwa $\mathrm{I} = 52^0\, 14'\, 89{,}77'' + (1)$ ist. Alsdann heissen die Gleichungen (6) des §. 3 jetzt: $52^0\, 14'\, 89{,}77'' + (1) = 52^0\, 14'\, 89{,}77''$ u. s. w., so dass man jetzt die Gleichungsform des §. 4 erhält, wo $\varphi_1 = 52^0\, 14'\, 89{,}77''$, $F_1 = \varphi_1$ u. s. w. Man sieht also, dass man folgende Gleichungen hat, denen wir ihre Gewichte beifügen:

$(1) = 0$ (G. 40), $(2) = 0$ (G. 20), $(3) = 0$ (G. 20), $(4) = 0$ (G. 30), $(5) = 0$ (G. 10), $(6) = 0$ (G. 30), $(7) = 0$ (G. 30), $(8) = 0$ (G. 30), $(9) = 0$ (G. 20), $(10) = 0$ (G. 40), $(11) = 0$ (G. 25), $(12) = 0$ (G. 50),

während, wenn man in die Bedingungsgleichungen für VI setzt $28^0\, 27'\, 86{,}20'' + (6)$ u. s. w., dieselben werden (Alles in Secunden ausgedrückt):

$$\left.\begin{array}{l} 9{,}75 = (5) - (4) - (6),\quad (7) - (2) + (1) + (5) = 4{,}64, \\ (9) - (7) - (10) = 1{,}12,\quad (11) - (10) + (8) = 18{,}46, \\ (3) - (2) - (10) - (12) = 24{,}68. \end{array}\right\} \quad (a)$$

Also muss

$$\begin{aligned} &40.(1)^2 + 20.(2)^2 + 20.(3)^2 + 30.(4)^2 + 10.(5)^2 + 30.(6)^2 \\ &+ 30.(7)^2 + 30.(8)^2 + 20.(9)^2 + 40.(10)^2 + 25.(11)^2 + 50.(12)^2 \\ &+ 2k_1\,[(5) - (4) - (6) - 9{,}75] + 2k_2\,[(7) - (2) + (1) + (5) - 4{,}64] \\ &+ 2k_3\,[(9) - (7) - (10) - 1{,}12] + 2k_4\,[(11) - (10) + (8) - 18{,}46] \\ &+ 2k_5\,[(3) - (2) - (10) - (12) - 24{,}68] \end{aligned}$$

ein Minimum sein (wobei wir wie oben $2k_1, \ldots$ statt k_1 geschrieben, was gleichgültig ist). Differenzirt man nun nach (1),..., (12) und setzt die Differentialquotienten $= 0$, so erhält man folgende zwölf Gleichungen:

$$\begin{array}{lll} 40.(1) + k_2 = 0, & 20.(2) - k_2 - k_5 = 0, & 20.(3) + k_5 = 0, \\ 30.(4) - k_1 = 0, & 10.(5) + k_1 + k_2 = 0, & 30.(6) - k_1 = 0, \\ 30.(7) + k_2 - k_3 = 0, & 30.(8) + k_4 = 0, & 20.(9) + k_3 = 0, \\ 40.(10) - k_3 - k_4 - k_5 = 0, & 25.(11) + k_4 = 0, & 50.(12) - k_5 = 0, \end{array}$$

*) D. h. $CMD = BMD - BMC$, $DME = AME - AMB - BMD$, $EMG = DMG - DME$, $FMG = DMG - DMF$, $GMH = AMH - AME - EMG$.

aus welchen Gleichungen, indem man $k_1, \ldots, k_5$ eliminirt, folgt:

$$20.(2) + 40.(1) - 50.(12) = 0,\quad 20.(3) + 50.(12) = 0,$$
$$10.(5) + 30.(4) - 40.(1) = 0,\quad 30.(6) - 30.(4) = 0,$$
$$30.(7) - 40.(1) + 20.(9) = 0,\quad 30.(8) - 25.(11) = 0,$$
$$40.(10) + 20.(9) + 25.(11) - 50.(12) = 0,$$

d. h.

$$\left.\begin{array}{l} 2.(2) + 4.(1) - 5.(12) = 0,\quad 2.(3) + 5.(12) = 0, \\ (5) + 3.(4) - 4.(1) = 0,\quad (6) - (4) = 0, \\ 3.(7) - 4.(1) + 2.(9) = 0,\quad 6.(8) - 5.(11) = 0, \\ 8.(10) + 4.(9) + 5.(11) - 10.(12) = 0, \end{array}\right\} \quad (b)$$

aus welchen Gleichungen, in Verbindung mit (a) nun folgt:

$(1) = -1{,}71$, $(2) = -6{,}11$, $(3) = 9{,}54$, $(4) = -3{,}32$, $(5) = 3{,}11$, $(6) = -3{,}32$, $(7) = -2{,}87$, $(8) = 5{,}22$, $(9) = -6{,}96$, $(10) = -5{,}21$, $(11) = 6{,}28$, $(12) = -3{,}82$,

so dass als wahrscheinlichste Werthe man hat:

$AMB =$	$52^0\,14'\,88{,}06''$,	$DME =$	$55^0\,39'\,99{,}43''$,
$AME =$	201 07 26,85	$DMF =$	68 09 01,94,
$AMH =$	334 70 32,20	$DMG =$	100 73 48,98,
$BMC =$	65 24 56,48	$EMG =$	45 33 49,55,
$BMD =$	93 52 39,36	$FMG =$	32 64 47,04,
$CMD =$	28 27 82,88	$GMH =$	88 29 55,80.

§. 6.

Wahrscheinlichste Werthe und wahrscheinliche Fehler von Grössen, die Functionen sind solcher, welche durch Beobachtung unmittelbar gegeben wurden.

Sind $N, N', N'', \ldots$ gewisse Grössen, die durch Beobachtung unmittelbar bestimmt werden sollen und können, und man hat durch eben diese Beobachtung für dieselben die Werthe $n, n', n'', \ldots$ mit den wahrscheinlichen Fehlern $r, r', r'', \ldots$ (§. 2) gefunden; ist ferner V eine Function der Grössen $N, N', N'', \ldots$, so ist wohl selbstverständlich, dass der wahrscheinlichste Werth von V der sein werde, den man erhält, wenn man für $N, N', N'', \ldots$ die Werthe $n, n', n'', \ldots$ setzt. Es handelt sich also vorzugsweise darum, den wahrscheinlichen Fehler von V zu ermitteln, den man begeht, wenn man für $N, N', N'', \ldots$ die an-

gegebenen Werthe wählt. Um diese Aufgabe erledigen zu können, müssen wir in der folgenden Weise verfahren.

I. Sei a eine unveränderliche und bekannte Grösse, und $V = aN$, d. h. V eine lineare Function von N der einfachsten Art.

Unsere Aufgabe ist, wie gesagt, den wahrscheinlichsten Werth von V zu ermitteln, sowie den wahrscheinlichen Fehler des so gefundenen Werthes anzugeben. Was N anbelangt, so wird diese Grösse durch unmittelbare Beobachtung erhalten, und ist für sie n gefunden worden mittelst einer Beobachtungsweise, deren wahrscheinlicher Fehler r ist. Vor aller Beobachtung war demnach die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler v zu begehen, nach §. 2 gleich

$$\frac{h\varepsilon}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 v^2}, \text{ wo } rh = \varrho \text{ [§. 2, (5)]}.$$

Wählen wir irgend einen Werth von N, etwa μ als den wahren Werth, so ist $n-\mu$ der Fehler, den man begeht, wenn man den Werth n erhält, so dass also $v = n - \mu$ ist. Mit anderen Worten, es ist die Wahrscheinlichkeit, statt des wahren Werthes μ den Werth n zu finden; also den Fehler $n-\mu$ zu begehen:

$$\frac{h\varepsilon}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(n-\mu)^2}.$$

Ein Beobachtungsfehler wurde begangen; er ist theoretisch ein anderer, je nachdem μ eine andere Grösse ist; die Annahme dieser Grösse ist somit, wie in §. 3, als eine Ursache anzusehen, aus der dann der Fehler $n-\mu$ fliesst. Dass also diese Ursache bestanden, d. h. dass (ein bestimmt gedachter Werth) μ der wahre Werth von N ist, dafür hat man, nach Einl. VI., die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{\frac{h\varepsilon}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(n-\mu)^2}}{\sum \frac{h\varepsilon}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2(n-\mu)^2}} = \frac{e^{-h^2(n-\mu)^2}}{\sum e^{-h^2(n-\mu)^2}},$$

wo das Zeichen Σ wieder bedeutet, es solle in $e^{-h^2(n-\mu)^2}$ der Grösse μ alle möglichen Werthe beigelegt, und dann die Summe aller so erhaltenen Grössen genommen werden. Daraus folgt, dass der Nenner von μ unabhängig ist, und wenn wir ihn mit A

bezeichnen, so ist also die Wahrscheinlichkeit, es sei (der beliebig gewählte, aber doch bestimmt gedachte Werth) μ der wahre Werth von N, gleich $\frac{1}{A} e^{-h^2(n-\mu)^2}$. Denjenigen Werth μ haben wir nun zu wählen, für den diese Grösse ihren höchsten Werth erreicht, was für $\mu = n$ der Fall ist, so dass also n der wahrscheinlichste Werth von N ist, wie natürlich, da wir ihn durch Beobachtung gefunden, und als solchen Werth also nehmen müssen.

Ist aber μ der wahre Werth von N, so ist gewiss $a\mu$ der wahre Werth von V; bezeichnet man also den wahren Werth von V mit ξ, so ist $\xi = a\mu$, also $\mu = \frac{\xi}{a}$, und die Grösse

$$\frac{e^{-h^2(n-\mu)^2}}{\Sigma e^{-h^2(n-\mu)^2}},$$

welche die Wahrscheinlichkeit ausdrückte, dass μ der wahre Werth von N war, drückt auch die Wahrscheinlichkeit aus, dass ξ der wahre Werth von V ist, wenn nur $\mu = \frac{\xi}{a}$. Setzt man diesen Werth ein, so hat man

$$\frac{e^{-h^2\left(n-\frac{\xi}{a}\right)^2}}{\sum e^{-h^2\left(n-\frac{\xi}{a}\right)^2}} = \frac{e^{-\frac{h^2}{a^2}(na-\xi)^2}}{\sum e^{-\frac{h^2}{a^2}(na-\xi)^2}},$$

und wenn ε die unendlich kleine Grösse ist, um die die Werthe von ξ wachsen, man ferner beachtet, dass diese von $-\infty$ bis $+\infty$ schwanken können, so ist die Wahrscheinlichkeit, ξ sei der rechte Werth von V, gleich

$$\frac{e^{-\frac{h^2}{a^2}(na-\xi)^2}\varepsilon}{\sum e^{-\frac{h^2}{a^2}(na-\xi)^2}\varepsilon} = \frac{\varepsilon e^{-\frac{h^2}{a^2}(na-\xi)^2}}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h^2}{a^2}(na-\xi)^2} d\xi} = \frac{h\varepsilon}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{h^2}{a^2}(na-\xi)^2},$$

wenn man beachtet, dass der Werth des Integrals im Nenner $= \frac{a\sqrt{\pi}}{h}$ ist. Daraus folgt, dass $\xi = na$ der wahrscheinlichste Werth von V ist, wie vorauszusehen war. Da $na - \xi$ der Fehler dieser Annahme ist (d. h. wenn ξ den wahren Werth be-

deutet, so wird $na - \xi$ der, freilich unbekannte, Fehler sein, den man begeht, wenn man na für V nimmt), so ist die vorhin gefundene Grösse $\frac{h\varepsilon}{a\sqrt{\pi}}\, e^{-\frac{h^2}{a^2}(na-\xi)^2}$ also auch die Wahrscheinlichkeit, den Fehler $na - \xi = v$ zu begehen. Vergleicht man dies mit §. 2 und §. 3, so ergiebt sich für die Wahrscheinlichkeit, dieser Fehler liege zwischen $-\alpha$ und α:

$$\frac{2h}{a\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha} e^{-\frac{h^2}{a^2}v^2}\, dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{h\alpha}{a}} e^{-z^2}\, dz.$$

Diese Grösse ist $= \frac{1}{2}$, wenn

$$\frac{h\alpha}{a} = \varrho, \quad \alpha = \frac{a\varrho}{h}.$$

Daraus ergiebt sich, dass wenn r' der wahrscheinliche Fehler ist, den man begeht, indem man na als wahren Werth von V nimmt, man haben werde:

$$\frac{r'h}{a} = \varrho, \quad r' = \frac{a\varrho}{h}.$$

Da aber $\frac{\varrho}{h} = r$, so ist also $r' = ar$, so dass also an der wahrscheinlichste Werth von V, und ar der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung ist.

II. Sei $V = N + N'$ und seien h, h' so bestimmt, dass $rh = \varrho$, $r'h' = \varrho$ (§. 2).

Gesetzt es seien μ, μ' die wahren Werthe von N, N', so wäre vor aller Beobachtung die Wahrscheinlichkeit, die Fehler $n - \mu$, $n' - \mu'$ zu begehen (die ja begangen werden, wenn man n, n' für N, N' findet), nach §. 2 gleich

$$\frac{\varepsilon h}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2(n-\mu)^2}, \quad \frac{\varepsilon' h'}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h'^2(n'-\mu')^2},$$

wo ε, ε' zwei unendlich kleine Grössen sind. Die Wahrscheinlichkeit, beide Fehler zugleich zu begehen, wäre also (Einl. V.):

$$\frac{\varepsilon\varepsilon' hh'}{\pi}\, e^{-h^2(n-\mu)^2 - h'^2(n'-\mu')^2}.$$

Daraus folgt nun, wie früher, dass die Wahrscheinlichkeit der Annahme, es seien wirklich (die bestimmt gedachten) μ, μ' die Werthe von N, N' ist:

$$\frac{\frac{\varepsilon\varepsilon' h h'}{\pi} e^{-h^2(n-\mu)^2 - h'^2(n'-\mu')^2}}{\sum\sum \frac{\varepsilon\varepsilon' h h'}{\pi} e^{-h^2(n-\mu)^2 - h'^2(n'-\mu')^2}} = \frac{e^{-h^2(n-\mu)^2 - h'^2(n'-\mu')^2}}{\sum\sum e^{-h^2(n-\mu)^2 - h'^2(n'-\mu')^2}}.$$

Daraus folgt, nebenbei gesagt, wie begreiflich, dass n, n' die wahrscheinlichsten Werthe von N, N' sind, da für $\mu = n$, $\mu' = n'$ diese Grösse ein Maximum ist.

Sind aber μ, μ' die wahren Werthe von N, so ist gewiss $\mu + \mu'$ der wahre Werth von V, so dass wenn $\mu + \mu' = \xi$ die obige Grösse auch die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, nicht nur dass μ, μ' die wahren Werthe von N, N', sondern auch dass ξ der wahre Werth von V ist, wenn $\xi = \mu + \mu'$. Da aber hieraus folgt $\mu' = \xi - \mu$, und wenn μ, μ' alle möglichen Werthe durchlaufen, auch ξ alle möglichen Werthe durchlaufen wird, so kann man auch sagen, es sei die Grösse

$$\frac{e^{-h^2(n-\mu)^2 - h'^2(n'-\xi+\mu)^2}}{\Sigma\Sigma\, e^{-h^2(n-\mu)^2 - h'^2(n'-\xi+\mu)^2}},$$

wo die Σ sich auf alle möglichen Werthe von μ und ξ beziehen, die Wahrscheinlichkeit, μ und ξ seien die wahren Werthe von N und V. Der Natur der Sache nach können μ und ξ zwischen $-\infty$ und $+\infty$ schwanken, so dass wenn ε, ε' unendlich kleine Grössen sind, um welche μ und ξ wachsen, die soeben gefundene Grösse auch gleich ist

$$\frac{\varepsilon\varepsilon' e^{-h^2(n-\mu)^2 - h'^2(n'-\xi+\mu)^2}}{\Sigma\Sigma\,\varepsilon\varepsilon' e^{-h^2(n-\mu)^2 - h'^2(n'-\xi+\mu)^2}} = \frac{\varepsilon\varepsilon' e^{-h^2(n-\mu)^2 - h'^2(n'-\xi+\mu)^2}}{\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(n-\mu)^2 - h'^2(n'-\xi+\mu)^2} d\mu\, d\xi}.$$

Aber

$$h^2(n-\mu)^2 + h'^2(n'-\xi+\mu)^2$$

$$= (h^2+h'^2)\left(\mu - \frac{h'^2\xi + h^2 n - h'^2 n'}{h^2+h'^2}\right)^2 + \frac{h^2 h'^2}{h^2+h'^2}(\xi-n-n')^2,$$

und also

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(n-\mu)^2-h'^2(n'-\xi+\mu)^2}\, d\mu\, d\xi$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h^2 h'^2}{h^2+h'^2}(\xi-n-n')^2} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(h^2+h'^2)\left(\mu-\frac{h'^2\xi+h^2 n-h'^2 n'}{h^2+h'^2}\right)^2} d\mu$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{h^2 h'^2}{h^2+h'^2}(\xi-n-n')^2} d\xi \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{h^2+h'^2}}=\frac{\pi}{h h'},$$

so dass

$$\frac{h h' \varepsilon\varepsilon'}{\pi} e^{-(h^2+h'^2)\left(\mu-\frac{h'^2\xi+h^2 n-h'^2 n'}{h^2+h'^2}\right)^2-\frac{h^2 h'^2}{h^2+h'^2}(\xi-n-n')^2}$$

die Wahrscheinlichkeit ist, μ und ξ seien zugleich die wahren Werthe von N und V. Dabei denken wir uns natürlich unter μ und ξ bestimmte Werthe. Wollen wir also diese Grösse etwas anders auslegen, so können wir auch sagen, sie drücke die Wahrscheinlichkeit aus, der gemeinte bestimmte Werth ξ sei der wahre Werth von V, wenn zugleich auch μ der wahre Werth von N ist. Daraus ergiebt sich nach Einl. IV. leicht, dass man für die Wahrscheinlichkeit, ξ sei der wahre Werth von V, was immer auch der wahre Werth von N sein möge, erhalte

$$\sum \frac{h h' \varepsilon\varepsilon'}{\pi} e^{-(h^2+h'^2)\left(\mu-\frac{h'^2\xi+h^2 n-h'^2 n'}{h^2+h'^2}\right)^2-\frac{h^2 h'^2}{h^2+h'^2}(\xi-n-n')^2},$$

wo das Σ sich auf alle Werthe von μ erstreckt, während ξ unverändert ist. Demnach ist diese Grösse auch gleich

$$\frac{h h' \varepsilon'}{\pi} e^{-\frac{h^2 h'^2}{h^2+h'^2}(\xi-n-n')^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(h^2+h'^2)\left(\mu-\frac{h'^2\xi+h^2 n-h'^2 n'}{h^2+h'^2}\right)^2} d\mu$$

$$=\frac{h h' \varepsilon'}{\sqrt{h^2+h'^2}\sqrt{\pi}} e^{-\frac{h^2 h'^2}{h^2+h'^2}(\xi-n-n')^2},$$

die nun die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, ξ sei der wahre Werth von V (was auch N und N' sein mögen).

Daraus ergiebt sich, dass $\xi=n+n'$ der wahrscheinlichste Werth von V ist; ist sodann R der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung, so ist

$$\frac{h h'}{\sqrt{h^2+h'^2}} R=\varrho,\quad R=\frac{\varrho\sqrt{h^2+h'^2}}{h h'}=\varrho\sqrt{\frac{1}{h^2}+\frac{1}{h'^2}}=\sqrt{\frac{\varrho^2}{h^2}+\frac{\varrho^2}{h'^2}},$$

da, wenn man $\frac{hh'}{\sqrt{h^2+h'^2}}$ für h in §. 2 einsetzt, obige Grösse die Form $\frac{h\varepsilon}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2v^2}$ annimmt *). Aber $\frac{\varrho}{h}=r$, $\frac{\varrho'}{h}=r'$, so dass also

$n+n'$ der wahrscheinlichste Werth von V, und der wahrscheinliche Fehler dieser Bestimmung gleich $\sqrt{r^2+r'^2}$ ist.

III. Sei nun $V=aN+bN'$, wo a und b bestimmte Constanten sind, so ist nach I. der wahrscheinlichste Werth von aN gleich an mit dem wahrscheinlichen Fehler ar, der von bN' aber bn' mit dem wahrscheinlichen Fehler br', so dass nach II. (da auch aN und bN' von einander unabhängig sind) der wahrscheinlichste Werth von V ist $an+bn'$ mit dem wahrscheinlichen Fehler $\sqrt{a^2r^2+b^2r'^2}$.

Ist allgemein $V=aN+bN'+cN''+\cdots$, wo a, b, $c,\ldots$ Constanten sind, so ist zunächst der wahrscheinlichste Werth von $aN+bN'$ gleich $an+bn'$ mit dem wahrscheinlichen Fehler $\sqrt{a^2r^2+b^2r'^2}$, also nach II. der von $(aN+bN')$

---

*) Es dürfte wohl nicht unnöthig sein, zur weiteren Verdeutlichung dies genauer zu erörtern. Setzt man $\frac{hh'}{\sqrt{h^2+h'^2}}=H$, so ist

$$\frac{hh'\varepsilon}{\sqrt{h^2+h'^2}\sqrt{\pi}}e^{-\frac{h^2h'^2}{h^2+h'^2}(\xi-n-n')^2}=\frac{H\varepsilon}{\sqrt{\pi}}e^{-H^2(\xi-n-n')^2},$$

und drückt die (theoretische) Wahrscheinlichkeit aus, ξ sei der wahre Werth von V. Nimmt man für letztere Grösse aber $n+n'$, so begeht man, wenn ξ wirklich der wahre Werth von V ist, den Fehler $\xi-n-n'=v$, und es ist also $\frac{H\varepsilon}{\sqrt{\pi}}e^{-H^2v^2}$ die Wahrscheinlichkeit, bei der Annahme $V=n+n'$ den Fehler v zu begehen. Wie in §. 2 ergiebt sich hieraus die Wahrscheinlichkeit, es schwanke der so begangene Fehler zwischen $-\alpha$ und $+\alpha$, gleich

$$\frac{2H}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha}e^{-H^2v^2}dv=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha H}e^{-z^2}dz.$$

Diese Grösse ist $\frac{1}{2}$, wenn $\alpha H=\varrho$, oder $\alpha=R$, so dass also die Wahrscheinlichkeit, der bei der Annahme $V=n+n'$ begangene Fehler schwanke zwischen $-R$ und $+R$, gleich $\frac{1}{2}$ ist. Und eben deshalb ist R der **wahrscheinliche Fehler** jener Annahme.

$+ cN'' : an + bn' + cn''$ mit dem wahrscheinlichen Fehler: $\sqrt{(\sqrt{a^2 r^2 + b^2 r'^2})^2 + c^2 r''^2} = \sqrt{a^2 r^2 + b^2 r'^2 + c^2 r''^2}$ u. s. w.

Hat man $V = A + aN + bN' + cN'' + \cdots$, wo auch A eine Constante ist, so setze man $V - A = aN + bN' + cN'' + \cdots$, und hat als wahrscheinlichsten Werth von $V - A$: $an + bn' + cn'' + \cdots$ mit dem wahrscheinlichen Fehler $\sqrt{a^2 r^2 + b^2 r'^2 + c^2 r''^2 + \cdots}$, so dass der wahrscheinlichste Werth von V ist $A + an + bn' + cn'' + \cdots$, mit dem wahrscheinlichen Fehler $\sqrt{a^2 r^2 + b^2 r'^2 + c^2 r''^2 + \cdots}$.

IV. Sei endlich V eine beliebige Function von $N, N', \ldots$, die wir durch $f(N, N', N'', \ldots)$ bezeichnen wollen, so werden wir immer $N = n + \varDelta N$, $N' = n' + \varDelta N'$, ... setzen dürfen, wo $\varDelta N$, $\varDelta N'$, ... immer kleine Grössen sind, indem die wahren Werthe von $N, N', \ldots$ nur wenig von $n, n', \ldots$ verschieden sein können. Man hat also

$$V = f(n + \varDelta N, n' + \varDelta N', \ldots) = f(n, n', n'', \ldots) + \frac{df}{dn} \varDelta N + \frac{df}{dn'} \varDelta N' + \cdots,$$

wenn man nach dem Taylor'schen Satze entwickelt und bei den ersten Potenzen von $\varDelta N$, $\varDelta N'$, ... stehen bleibt. Nun ist $f(n, n', n'', \ldots)$ eine Constante von der Art derer, die in III. mit A bezeichnet worden; desgleichen sind $\frac{df}{dn}, \frac{df}{dn'}, \ldots$ Constanten; die wahrscheinlichsten Werthe von $\varDelta N$, $\varDelta N'$, ... sind Null mit den wahrscheinlichsten Fehlern $r, r', \ldots$; daraus folgt nach III., dass der wahrscheinlichste Werth von V ist $f(n, n', n'', \ldots)$ mit dem wahrscheinlichen Fehler $\sqrt{\left(\frac{df}{dn} r\right)^2 + \left(\frac{df}{dn'} r'\right)^2 + \left(\frac{df}{dn''} r''\right)^2 + \cdots}$

§. 7.

Bestimmung der wahrscheinlichen Fehler und des Gewichts der nach §. 3 erhaltenen Werthe von $x, y, z, \ldots$

Gesetzt es folge aus den Gleichungen (11) des §. 3:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \cdots + \alpha_m F_m, \\ y &= \beta_1 F_1 + \beta_2 F_2 + \cdots + \beta_m F_m, \\ z &= \gamma_1 F_1 + \gamma_2 F_2 + \cdots + \gamma_m F_m, \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad (21)$$

wo $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_m, \ldots$ keine F enthalten, und seien $r_1, r_2, \ldots, r_m$ die wahrscheinlichen Fehler von $F_1, \ldots, F_m$, so ist nach §. 6, III. der wahrscheinliche Fehler von x gleich $\sqrt{\alpha_1^2 r_1^2 + \alpha_2^2 r_2^2 + \cdots + \alpha_m^2 r_m^2} = \sqrt{[\alpha^2 r^2]}$, ebenso der von $y: \sqrt{[\beta^2 r^2]}$, von $z: \sqrt{[\gamma^2 r^2]}$, u. s. w.

Ist dann weiter g das Gewicht von x, sind $g_1, g_2, \ldots, g_m$ die Gewichte von $F_1, \ldots, F_m$, so ist nach §. 3:

$$g : g_1 : g_2 : \ldots : g_m = \frac{1}{[\alpha^2 r^2]} : \frac{1}{r_1^2} : \frac{1}{r_2^2} : \ldots : \frac{1}{r_m^2},$$

also

$$g = \frac{g_1 r_1^2}{[\alpha^2 r^2]} = \frac{g_2 r_2^2}{[\alpha^2 r^2]} = \cdots = \frac{g_m r_m^2}{[\alpha^2 r^2]},$$

woraus auch

$$r_1^2 = \frac{g[\alpha^2 r^2]}{g_1}, \quad r_2^2 = \frac{g[\alpha^2 r^2]}{g_2}, \ldots, \quad r_m^2 = \frac{g[x^2 r^2]}{g_m},$$

$$\alpha_1^2 r_1^2 + \alpha_2^2 r_2^2 + \cdots + \alpha_m^2 r_m^2 = g[\alpha^2 r^2] \left\{ \frac{\alpha_1^2}{g_1} + \frac{\alpha_2^2}{g_2} + \cdots + \frac{\alpha_m^2}{g_m} \right\},$$

$$[\alpha^2 r^2] = g[\alpha^2 r^2] \left[\frac{\alpha^2}{g}\right], \quad g = \frac{1}{\left[\frac{\alpha^2}{g}\right]}.$$

Demnach sind die Gewichte von $x, y, z, \ldots$:

$$\frac{1}{\left[\frac{\alpha^2}{g}\right]}, \frac{1}{\left[\frac{\beta^2}{g}\right]}, \frac{1}{\left[\frac{\gamma^2}{g}\right]}, \ldots \tag{22}$$

Es lässt sich diese Bestimmung aber in anderer bequemerer Form durchführen. Gesetzt nämlich, man ziehe aus den Gleichungen (11):

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1[Fag] + A_2[Fbg] + A_3[Fcg] + \cdots, \\ y &= B_1[Fag] + B_2[Fbg] + B_3[Fcg] + \cdots, \\ z &= C_1[Fag] + C_2[Fbg] + C_3[Fcg] + \cdots, \\ &\;\;\vdots \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

wo $A_1, A_2, \ldots, B_1, B_2, \ldots$, gewisse kein F enthaltende Grössen sind, so sind die Gewichte von $x, y, z, \ldots$ einfach $\frac{1}{A_1}, \frac{1}{B_2}, \frac{1}{C_3}, \ldots$.

Um diesen Satz zu beweisen, wollen wir etwa das Gewicht von z bestimmen. Vergleichen wir die Formeln (21) und (23), so ist offenbar

$$\gamma_1 = C_1 a_1 g_1 + C_2 b_1 g_1 + C_3 c_1 g_1 + \cdots,$$
$$\gamma_2 = C_1 a_2 g_2 + C_2 b_2 g_2 + C_3 c_2 g_2 + \cdots,$$
$$\vdots$$

also ist $\left[\frac{\gamma^2}{g}\right]$ gleich

$$g_1 (C_1 a_1 + C_2 b_1 + C_3 c_1 + \cdots)^2 + g_2 (C_1 a_2 + C_2 b_2 + C_3 c_2 + \cdots)^2 + \cdots$$
$$+ g_m (C_1 a_m + C_2 b_m + C_3 c_m + \cdots)^2$$
$$= C_1 (C_1 [a^2 g] + C_2 [abg] + C_3 [acg] + \cdots)$$
$$+ C_2 (C_1 [abg] + C_2 [b^2 g] + C_3 [bcg] + \cdots)$$
$$+ C_3 (C_1 [acg] + C_2 [bcg] + C_3 [c^2 g] + \cdots)$$
$$+ \cdots,$$

wie man sich leicht überzeugt.

Denken wir uns nun einmal in den Gleichungen (11) an die Stelle von F geschrieben a, so muss offenbar $x = 1$, $y = 0$, $z = 0, \ldots$ sein; wird b für F geschrieben, so muss $x = 0$, $y = 1$, $z = 0, \ldots$ sein; schreibt man c für F, so ist $x = 0$, $y = 0$, $z = 1, \ldots$ u. s. w. Daraus folgt also, dass wenn in (23) für F geschrieben wird $a, b, c, \ldots$, dann z immer Null ist, ausser für $F = c$, wo $z = 1$ sein muss; mit anderen Worten, es ist

$$C_1 [a^2 g] + C_2 [abg] + C_3 [acg] + \cdots = 0,$$
$$C_1 [abg] + C_2 [b^2 g] + C_3 [bcg] + \cdots = 0.$$
$$C_1 [acg] + C_2 [bcg] + C_3 [c^2 g] + \cdots = 1, \ldots.$$

so dass mithin $\left[\frac{\gamma^2}{g}\right] = C_3$, und $\frac{1}{\left[\frac{\gamma^2}{g}\right]} = \frac{1}{C_3}$, wodurch offenbar obige Behauptung gerechtfertigt ist.

Man sieht leicht, dass für die Gleichungen (15) des §. 4 ganz dasselbe gilt. Es treten jetzt nur $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \ldots$ an die Stelle von $a, b, \ldots$ und $F - \varphi$ an die Stelle der F, so dass also etwa

$$x' = A_1 \left[g (F - \varphi) \frac{d\varphi}{dx}\right] + A_2 \left[g (F - \varphi) \frac{d\varphi}{dy}\right] + \cdots,$$
$$y' = B_1 \left[g (F - \varphi) \frac{d\varphi}{dx}\right] + B_2 \left[g (F - \varphi) \frac{d\varphi}{dy}\right] + \cdots,$$
$$\vdots$$

oder auch

$$x' = A_1\left[gF\frac{d\varphi}{dx}\right] + A_2\left[gF\frac{d\varphi}{dy}\right] + \cdots - \left\{A_1\left[g\varphi\frac{d\varphi}{dx}\right] + A_2\left[g\varphi\frac{d\varphi}{dy}\right] + \cdots\right\},$$

$$y' = B_1\left[gF\frac{d\varphi}{dx}\right] + B_2\left[gF\frac{d\varphi}{dy}\right] + \cdots - \left\{B_1\left[g\varphi\frac{d\varphi}{dx}\right] + B_2\left[g\varphi\frac{d\varphi}{dy}\right] + \cdots\right\},$$

und da nun die letzten Theile gar kein F enthalten, so werden nur die ersteren zur Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers eintreten (§. 6, III.). Da ferner, wenn man nur oben überall $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \ldots$ für $a, b, \ldots, x', y', z', \ldots$ für $x, y, z, \ldots$ und $F - \varphi$ für F setzt, alles Gesagte seine Richtigkeit hat, so gelten ganz dieselben Resultate.

Man kann also sagen: Sind in den Fällen der Gleichungen (11) oder (15) (in denen also keine Bedingungsgleichungen für $x, y, z, \ldots$ gegeben sind) die zu bestimmenden Unbekannten $x', y', z', \ldots$ durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 x' + \beta_1 y' + \gamma_1 z' + \cdots &= A, \\ \alpha_2 x' + \beta_2 y' + \gamma_2 z' + \cdots &= B, \\ \alpha_3 x' + \beta_3 y' + \gamma_3 z' + \cdots &= C, \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

gegeben, wo $A, B, C, \ldots$ keine der Unbekannten enthalten, während auf den ersten Seiten nur Glieder mit den Unbekannten vorkommen, und ist dann in dem erhaltenen Werthe

von x' der Coëfficient von A gleich e_1,
„ y' „ „ „ B „ e_2,
„ z' „ „ „ C „ e_3,
⋮

so ist $\frac{1}{e_1}$ das Gewicht von x', $\frac{1}{e_2}$ von y', $\frac{1}{e_3}$ von z', u. s. w. Dabei muss die erste Gleichung (24) die sein, die durch Differentiation nach x' entstanden ist; die zweite muss durch Differentiation nach y' entstanden sein, u. s. w.

Ist nun r der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1, h das Maass der Genauigkeit dieser Beobachtung; $r_1, r_2, \ldots, r_m$ wie oben die wahrscheinlichen Fehler von $F_1, \ldots, F_m$, deren Gewichte $g_1, \ldots, g_m$ sind; $h_1, h_2, \ldots, h_m$ die Maasse der Genauigkeit für diese Grössen; sind ferner R_1, H_1 die entsprechenden Grössen für x', R_2, H_2 für y', u. s. w., so ist (§. 3):

$$1:g_1:g_2:\ldots:g_m=\frac{1}{r^2}:\frac{1}{r_1{}^2}:\frac{1}{r_2{}^2}:\ldots:\frac{1}{r_m{}^2}=h^2:h_1{}^2:h_2{}^2:\ldots:h_m{}^2,$$

$$1:\frac{1}{e_1}=\frac{1}{r^2}:\frac{1}{R_1{}^2}=h^2:H_1{}^2,$$

$$1:\frac{1}{e_2}=\frac{1}{r^2}:\frac{1}{R_2{}^2}=h^2:H_2{}^2,$$

also

$$r_1{}^2=\frac{r^2}{g_1},\quad r_2{}^2=\frac{r^2}{g_2},\ldots,\quad r_m{}^2=\frac{r^2}{g_m},$$

$$R_1{}^2=e_1\,r^2,\quad R_2{}^2=e_2\,r^2,\quad R_3{}^2=e_3\,r^2,\ldots,$$

und

$$h\,r=h_1\,r_1=\cdots=h_m\,r_m=H_1\,R_1=H_2\,R_2=H_3\,R_3=\cdots=\varrho\quad(§.\,3).$$

Hat man irgend eine Function von x', y', z',... (oder x, y, z,..., wenn die Gleichungen (11) benützt wurden), so setzt man für x', y', z',... ihre Werthe (21) oder (23) ein und hat dann diese Function nun als Function der durch unmittelbare Beobachtung gegebenen Grössen F dargestellt, so dass mit ihr nach §. 6 verfahren werden kann.

Wir wollen dies anwenden auf die Function

$$K=k_0+k_1\,x+k_2\,y+k_3\,z+\cdots,$$

wo wohl auch x', y', z', ... für x, y, z, ... stehen könnte, wenn man (15) angewendet hätte. Setzt man für x, y, z,... die Werthe (23), so ist

$$\begin{aligned}K=k_0&+k_1\,(A_1\,[Fag]+A_2\,[Fbg]+\cdots)\\&+k_2\,(B_1\,[Fag]+B_2\,[Fbg]+\cdots)\\&+\cdots,\end{aligned}$$

so dass nach §. 6, III. der wahrscheinlichste Werth von K der ist, den man bekommt, wenn man für die F ihre bekannten Werthe, oder kürzer für x, y, z, ... ihre gefundenen Werthe einsetzt. Das Quadrat des wahrscheinlichen Fehlers dieser Bestimmung ist dann

$$\begin{aligned}&[k_1\,(A_1\,a_1\,g_1+A_2\,b_1\,g_1+A_3\,c_1\,g_1+\cdots)+k_2\,(B_1\,a_1\,g_1+B_2\,b_1\,g_1+\cdots)\\&\qquad\qquad+k_3\,(C_1\,a_1\,g_1+C_2\,b_1\,g_1+\cdots)+\cdots]^2\,r_1{}^2\\&+[k_1\,(A_1\,a_2\,g_2+A_2\,b_2\,g_2+\cdots)+k_2\,(B_1\,a_2\,g_2+B_2\,b_2\,g_2+\cdots)\\&\qquad\qquad+k_3\,(C_1\,a_2\,g_2+C_2\,b_2\,g_2+\cdots)+\cdots]^2\,r_2{}^2\\&+\cdots.\end{aligned}$$

Betrachten wir den ersten Theil und beachten, dass $g_1^2 r_1^2 = g_1 r^2$, so ist er, wenn wir diesen gemeinschaftlichen Factor weglassen:

$$\begin{aligned}
&k_1^2(A_1 a_1 + A_2 b_1 + A_3 c_1 + \ldots)^2 + k_2^2(B_1 a_1 + B_2 b_1 + B_3 c_1 + \ldots)^2 \\
&\quad + k_3^2 (C_1 a_1 + C_2 b_1 + C_3 c_1 + \ldots)^2 + \ldots \\
&\quad + 2 k_1 k_2 (A_1 a_1 + A_2 b_1 + \ldots)(B_1 a_1 + B_2 b_1 + \ldots) \\
&\quad + 2 k_1 k_3 (A_1 a_1 + A_2 b_1 + \ldots)(C_1 a_1 + C_2 b_1 + \ldots) \\
&\quad + \ldots .
\end{aligned}$$

Die übrigen erhält man hieraus, wenn man in $g, a, b, c, \ldots$ statt des Zeigers 1 setzt $2, 3, \ldots, m$. Addirt man sodann alle Grössen, so sieht man, dass man erhalten wird (wo r^2 weggelassen):

1) als Factor von k_1^2:

$$\begin{aligned}
&A_1 (A_1 [a^2 g] + A_2 [abg] + A_3 [acg] + \ldots) \\
+ &A_2 (A_1 [abg] + A_2 [b^2 g] + A_3 [bcg] + \ldots) \\
+ &A_3 (A_1 [acg] + A_2 [bcg] + A_3 [c^2 g] + \ldots) \\
+ &\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = A_1,
\end{aligned}$$

2) als Factor von k_2^2 eben so B_2, als Factor von k_3^2 : C_3 u. s. w.;

3) als Factor von $2 k_1 k_2$:

$$\begin{aligned}
&A_1 (B_1 [a^2 g] + B_2 [abg] + B_3 [acg] + \ldots) \\
+ &A_2 (B_1 [abg] + B_2 [b^2 g] + B_3 [bcg] + \ldots) \\
+ &\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad = A_2
\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}
&B_1 (A_1 [a^2 g] + A_2 [abg] + \ldots) \\
+ &B_2 (A_1 [abg] + A_2 [b^2 g] + \ldots) \\
+ &\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad = B_1
\end{aligned}$$

so dass auch $A_2 = B_1$ ist;

4) als Factor von $2 k_1 k_3$ ebenso $A_3 = C_1$, von $2 k_1 k_4 : A_4 = D_1, \ldots,$ von $2 k_2 k_3 : B_3 = C_2$ u. s. w.,

so dass also das Quadrat des wahrscheinlichen Fehlers von K:

$$r^2 (A_1 k_1^2 + 2 A_2 k_1 k_2 + B_2 k_2^2 + 2 A_3 k_1 k_3 + 2 B_3 k_2 k_3 + C_3 k_3^2 + \ldots),$$

oder wenn man beachtet, dass

$$A_2 = B_1, \quad A_3 = C_1, \quad B_3 = C_2, \ldots,$$

so ist dasselbe

$$r^2 \Big[\quad k_1 (A_1 k_1 + A_2 k_2 + A_3 k_3 + \ldots) \\ + k_2 (B_1 k_1 + B_2 k_2 + B_3 k_3 + \ldots) \\ + k_3 (C_1 k_1 + C_2 k_2 + C_3 k_3 + \ldots) \\ + \ldots \qquad \Big].$$

Beachtet man die Gleichungen (23), so wird man dieses Ergebniss auch in folgender Form aussprechen können:

Gesetzt man setze statt der zweiten Seiten der Gleichungen (11) oder (15) bezüglich $k_1, k_2, \ldots, k_n$, und finde dann für x, y, z, ... (oder x', y', z', ...) die Werthe ξ, v, ζ, ..., so ist

$$r^2 (k_1 \xi + k_2 v + k_3 \zeta + \ldots)$$

das Quadrat des wahrscheinlichen Fehlers der Grösse

$$K = k_0 + k_1 x + k_2 y + k_3 z + \ldots,$$

wenn man hier für x, y, z, ... die Werthe aus (11) oder (15) setzt. Das Gewicht dieser Bestimmung ist mithin

$$\frac{1}{k_1 \xi + k_2 v + k_3 \zeta + \ldots}.$$

Anmerkung. Den Satz des §. 6, III. kann man auf die Grösse K nicht unmittelbar anwenden, d. h. nicht kurzweg sagen: die wahrscheinlichen Fehler von x, y, z,... seien R_1, R_2, R_3, ... so ist der wahrscheinliche Fehler von K gleich $\sqrt{k_1^2 R_1^2 + k_2^2 R_2^2 + k_3^2 R_3^2 + \ldots}$, weil die Grössen x, y, z,... nicht von einander unabhängig sind, oder vielmehr ihre wahrscheinlichsten Werthe nicht als wie durch von einander ganz unabhängige Beobachtungen gegeben angesehen werden können. Nur die Grössen F sind in dieser Lage und nur auf sie können also die Sätze des §. 6 angewendet werden. Es ist diese Bemerkung sehr wichtig, da gerade hiegegen sehr oft gefehlt wird, wodurch natürlich falsche Resultate erscheinen müssen.

§. 8.

Beispiele zu dem Vorstehenden. Gewicht des arithmetischen Mittels.

Nach §. 4, Formel (20) ist der wahrscheinlichste Werth einer Grösse x, für die man durch unmittelbare Beobachtung die Werthe F_1, F_2, ..., F_m mit den Gewichten g_1, g_2, ..., g_m gefunden hat, gleich

$$\frac{g_1 F_1 + g_2 F_2 + \ldots + g_m F_m}{g_1 + g_2 + \ldots + g_m} = \frac{[gF]}{[g]}.$$

Demnach ist das Gewicht dieses Werthes $= [g]$, indem hier $[gaF] = [gF]$ und der Coëfficient dieser Grösse $= \frac{1}{[g]}$ ist. Sind alle Beobachtungen gleich gut, so ist $[g] = mg$, wenn g das Gewicht der einfachen Beobachtung ist, so dass also ein Werth, der nach dem Satze des einfachen arithmetischen Mittels erhalten worden, gleich zu achten ist einer unmittelbaren Beobachtung vom $m$fachen Gewichte der einfachen Beobachtung.

Wären in den Gleichungen (6) des §. 2 mehrere davon so beschaffen, dass die $a, b, c, \ldots$ dieselben wären, während die F verschieden oder gleich sind, so könnte man statt aller dieser letzteren Gleichungen eine einzige setzen, in der die $a, b, c, \ldots$ die genannten Werthe haben, in der aber das F nach dem Satze des allgemeinen arithmetischen Mittels [§. 4 (20)] aus den genannten F gefunden wird. Denn es seien etwa die μ ersten Gleichungen (6) in der angegebenen Lage, so dass

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots &= F_1 \text{ (Gewicht } g_1), \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots &= F_2 \text{ („ } g_2), \\ &\vdots \\ a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots &= F_\mu \text{ („ } g_\mu), \end{aligned}$$

so, behaupte ich, kann man hiefür die einzige Gleichung

$$a_1x + b_1y + c_1z + \ldots = \frac{g_1 F + g_2 F_2 + \ldots + g_\mu F_\mu}{g_1 + g_2 + \cdots + g_\mu} \text{ (Gewicht } g_1 + g_2 + \ldots g_\mu)$$

setzen. Man sieht nämlich leicht, dass dadurch in den Coëfficienten der Gleichungen (11) keinerlei Aenderung hervorgebracht wird, so dass diese Gleichungen ganz dieselben bleiben. Man kann daher, wenn man nur eine einzige Grösse durch unmittelbare Beobachtung zu bestimmen hat, mehrere einzelne Beobachtungen zu einem arithmetischen Mittel vereinigen und dann diese einzelnen arithmetischen Mittel zum endgültigen. Ebenso hätte man in dem Beispiele III. des §. 5 diejenigen Werthe von F, die zu demselben α (b) gehören, in ein arithmetisches Mittel vereinigen dürfen.

Eine andere Folgerung aus dem soeben Gesagten ist noch die folgende, wobei allgemein zu bemerken ist, dass wenn m das Gewicht des nach (20′) in §. 4 erhaltenen arithmetischen Mittels ist, und r der wahrscheinliche Fehler der einfachen Beobachtung

(deren Gewicht $= 1$ angenommen worden) gemäss §. 3 der des arithmetischen Mittels gleich $\frac{r}{\sqrt{m}}$ sein muss, da die Quadrate der wahrscheinlichen Fehler sich umgekehrt verhalten wie die Gewichte.

Wir wollen annehmen, es seien zwei Längen L und l mit demselben Maassstabe λ gemessen, und sei etwa $\frac{L}{\lambda} = m$, wo wir uns m als ganze Zahl denken wollen; gesetzt ferner, der wahrscheinliche Fehler beim jedesmaligen Anlegen des Maassstabes sei r, so ist wohl $L = m\lambda$, aber es ist nicht etwa der wahrscheinliche Fehler von L nach I. in §. 6 gleich mr, denn m vertritt hier nicht die Stelle eines constanten Factors, vielmehr ist

$$L = \lambda + \lambda + \lambda + \ldots (m\text{mal}),$$

so dass dieser Fall unter III. des §. 6 gehört, und mithin der wahrscheinliche Fehler von L gleich $\sqrt{r^2 + r^2 + \ldots} = \sqrt{m r^2} = r\sqrt{m}$ $= r\sqrt{\frac{L}{\lambda}}$ ist. Ebenso ist der wahrscheinliche Fehler in l: $r\sqrt{\frac{l}{\lambda}}$. Gesetzt nun aber, man habe bloss l (einmal) gemessen mit dem wahrscheinlichen Fehler $r\sqrt{\frac{l}{\lambda}}$ und schliesse daraus durch Rechnung (etwa in einem Dreiecksnetze) $L = pl$, so ist jetzt nach I. in §. 6 der wahrscheinliche Fehler in L: $pr\sqrt{\frac{l}{\lambda}} = r\sqrt{p}\sqrt{\frac{pl}{\lambda}}$ $= r\sqrt{p}\sqrt{\frac{L}{\lambda}}$. Hätte man aber endlich l nicht nur einmal, sondern $p$mal gemessen, so wäre der wahrscheinliche Fehler in l, das man durch den Satz vom arithmetischen Mittel erhalten hat, gleich $\frac{r}{\sqrt{p}}\sqrt{\frac{l}{\lambda}} = r\sqrt{\frac{l}{p\lambda}}$, so dass dann der in L, das durch Rechnung aus l erhalten wurde, gleich $pr\sqrt{\frac{l}{p\lambda}} = r\sqrt{\frac{pl}{\lambda}} = r\sqrt{\frac{L}{\lambda}}$ wäre. Da dies dasselbe ist, wie für den Fall der directen Messung von L, so ergiebt sich hieraus folgende Regel:

Will man mittelst Rechnung eine grössere Seite aus einer kleineren (gemessenen) ebenso genau erhalten, als wenn man

jene unmittelbar einmal gemessen hätte, so wird man die kleinere so viel mal messen, als sie in der grösseren enthalten ist.

Nach diesen allgemeineren Betrachtungen wollen wir die Beispiele des §. 5 etwas näher betrachten.

Was das erste zunächst anbelangt, so wird, wenn 1 das Gewicht der einfachen Beobachtung ist, 29 das des Resultates sein, so dass, wenn r der wahrscheinliche Fehler der einfachen Beobachtung ist, der des Resultates $\frac{r}{\sqrt{29}}$ sein wird.

Für das zweite Beispiel ist, wenn wir (24) beachten,

$$10x + 3{,}52870y = A, \quad 3{,}52870x + 2{,}27504y = B$$

demnach $e_1 = \frac{2{,}27504}{10 \, . \, 2{,}27504 - 3{,}52870^2}, \quad \frac{1}{e_1} = \frac{22{,}7504 - 3{,}5287^2}{2{,}27504} = 4{,}53$

$$e_2 = \frac{10}{10 \, . \, 2{,}27504 - 3{,}52870^2}, \quad \frac{1}{e_2} = \frac{22{,}7504 - 3{,}5287^2}{10} = 1{,}03,$$

so dass das Gewicht von $A = 197{,}19$ ist $4{,}53$, das von $B = 2337{,}06$ nur $1{,}03$, wenn 1 das Gewicht der einfachen Beobachtung.

Für das dritte Beispiel hat man

$$95x + 19959{,}4y = A, \quad 19959{,}4x + 4595195y = B,$$

$$e_1 = \frac{4595195}{95 \, . \, 4595195 - 19959{,}4^2}, \quad \frac{1}{e_1} = \frac{95 \, . \, 4595195 - 19959{,}4^2}{4595195} = 8{,}3,$$

$$e_2 = \frac{95}{95 \, . \, 4595195 - 19959{,}4^2}, \quad \frac{1}{e_2} = \frac{95 \, . \, 4595195 - 19959{,}4^2}{95} = 401746,$$

woraus sich zeigt, mit welcher Genauigkeit der Coëfficient von α bestimmt ist. Es mag noch folgende etwas allgemeinere Betrachtung über einen speciellen Fall als Anwendung des Vorhergehenden hier ihren Platz finden.

Um den Längenunterschied zweier Orte zu bestimmen, kann man Nachts auf einem für beide Orte sichtbaren Berge Feuersignale aufblitzen lassen, dieselben an beiden Orten gehörig beobachten und die genaue Zeit der Beobachtung bemerken. Aus dem Unterschiede beider Zeiten ergiebt sich dann die Differenz der geographischen Längen (vergl. etwa mein „Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie“, S. 321).

Will man aber diese Beobachtung am Tage durch Heliotropenblitze anstellen, so kann dies so geschehen, dass man sich durch Gehülfen an den Ort hin, der von beiden sichtbar ist,

Heliotropenblitze geben lässt und zugleich am Chronometer die Zeit bemerkt. So liess Gerling (Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie, S. 75) sich auf den Frauenberg vom Meisner (Göttingen) und Feldberge (Mannheim) aus Signale geben und zwar von vier zu vier Minuten. Der Zeitunterschied zwischen Frauenberg und Meisner ergab sich aus 256, der von Frauenberg-Feldberg aus 136 Beobachtungen nach dem Satze des arithmetischen Mittels. Als wahrscheinlichen Fehler einer einfachen Beobachtung wählt Gerling 0,4 Secunden, so dass also der wahrscheinliche Fehler des ersten Resultates gleich $\frac{0{,}4}{\sqrt{256}}$, der des anderen $= \frac{0{,}4}{\sqrt{136}}$ ist; mithin der wahrscheinliche Fehler des Resultates Feldberg-Meisner, als der Summe beider (§. 6, II.) $= \sqrt{\frac{0{,}4^2}{256} + \frac{0{,}4^2}{136}} = 0{,}4\sqrt{\frac{1}{256} + \frac{1}{136}}$, und das Gewicht g des ganzen Resultates, wenn 1 das Gewicht der einfachen Beobachtung, erhalten wird aus

$$1 : g = \frac{1}{0{,}4^2} : \frac{1}{\frac{0{,}4^2}{256} + \frac{0{,}4^2}{136}}, \quad g = \frac{256 \cdot 136}{256 + 136} = 88{,}8.$$

Gesetzt nun, man habe n Stationen zwischen beide Endstationen eingeschoben und verfahre in derselben Weise wie vorhin, um den Zeitunterschied zwischen zwei auf einander folgenden zu erhalten. Man mache überall gleich viele (x) Beobachtungen, und fragt, wie viele solcher es bedarf, um ein Resultat vom Gewichte a zu erhalten.

Hat jede einzelne Beobachtung das Gewicht 1, so ist x das Gewicht jedes einzelnen Resultates, der wahrscheinliche Fehler desselben also $\frac{0{,}4}{\sqrt{x}}$, mithin der wahrscheinliche Fehler des Endresultates (§. 6, II. und III.) $0{,}4\sqrt{\frac{n+1}{x}}$, das Gewicht desselben also $\frac{x}{n+1}$, so dass

$$\frac{x}{n+1} = a, \quad x = (n+1)\,a$$

sein muss. Je grösser n ist, desto grösser muss, bei gleichblei-

bendem a, x sein, so dass die Regel hieraus fliesst, möglichst wenig Zwischenstationen zu machen.

Dass dieselbe Regel fürs Nivelliren gilt, ist offenbar.

Anmerkung. Will man die soeben angeführte Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers zwischen Feldberg-Meisner auf §. 6 in aller Schärfe zurückführen, so muss man in folgender Weise verfahren. Sei x der Unterschied Frauenberg-Meisner, $F_1, \ldots, F_{256}$ die einzelnen Beobachtungen, so ist $x = \frac{F_1 + \ldots + F_{256}}{256}$; ist y der Unterschied Meisner-Feldberg, $f_1, \ldots, f_{136}$ die einzelnen Beobachtungen, so ist $y = \frac{f_1 + \ldots + f_{136}}{136}$, und also das Endresultat Feldberg-Meisner gleich

$$\frac{F_1 + \ldots + F_{256}}{256} + \frac{f_1 + \ldots + f_{136}}{136},$$

wo nun die F und f durch unmittelbare Beobachtung gegeben sind, wie §. 6 verlangt. Da der wahrscheinliche Fehler jedes F oder f nun 0,4 ist, so ist der wahrscheinliche Fehler des Endresultates nach §. 6, III.:

$$\sqrt{\frac{0{,}4^2}{256^2} + \frac{0{,}4^2}{256^2} + \ldots + \frac{0{,}4^2}{256^2} + \frac{0{,}4^2}{136^2} + \frac{0{,}4^2}{136^2} + \ldots + \frac{0{,}4^2}{136^2}},$$

wo $\frac{0{,}4^2}{256^2}$ im Ganzen 256mal, dagegen $\frac{0{,}4^2}{136^2}$ nur 136mal vorkommt, so dass derselbe gleich

$$\sqrt{\frac{0{,}4^2}{256^2}\,256 + \frac{0{,}4^2}{136^2}\,136} = 0{,}4\sqrt{\frac{1}{256} + \frac{1}{136}}$$

ist, wie oben gefunden.

§. 9.

Bestimmung des Gewichts der aus den Gleichungen (18) und (19) des §. 4 erhaltenen Grössen.

Sind noch Bedingungsgleichungen gegeben, denen die gesuchten Grössen zu genügen haben, wie dies in §. 4 der Fall ist, wo die Unbekannten den Gleichungen (16) genügen müssen, so haben wir dort schon gesehen, dass die Ermittelung dieser Unbekannten immer auf die Auflösung von linearen Gleichungen zurückgeführt werden kann. Stellen wir dies unter einer etwas verschiedenen Form dar, so wird man sagen können, es seien die wahrscheinlichsten Werthe von n Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu bestimmen, so dass dieselben genau den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \alpha\,, \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n = \beta\,, \\ \quad\vdots \\ \sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \ldots + \sigma_n x_n = \sigma\,,\end{array}\right\} \quad (25)$$

der Anzahl nach r, genügen, wo dann $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha, \ldots, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma$ bekannte Grössen sind, während durch unmittelbare Beobachtung gegeben ist:

$$\left.\begin{array}{l}a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 + \ldots = M_1 \text{ (Gew. } g_1), \\ a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 + \ldots = M_2 \text{ (,, } g_2), \\ \quad\vdots \\ a_m x_1 + b_m x_2 + c_m x_3 + \ldots = M_m \text{(,, } g_m),\end{array}\right\} \quad (26)$$

und worin die $M_1, \ldots, M_m$ die Differenzen $F - \varphi$ in §. 4 bedeuten, die wir ganz wohl als durch unmittelbare Beobachtung gegeben ansehen dürfen. Dabei muss natürlich $m > n - r$ sein, da jetzt nur $n - r$ wirklich Unbekannte vorhanden sind.

Gemäss §. 3 muss nun die Summe

$$g_1(a_1 x_1 + b_1 x_2 + \ldots - M_1)^2 + g_2(a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots - M_2)^2 + \ldots \quad (27)$$

ein Minimum sein, während zwischen $x_1, x_2, \ldots$ noch die (25) bestehen. Zur Auflösung bieten sich nun zwei Wege dar. Entweder man bestimmt aus den (25) r der Grössen $x_1, x_2, \ldots$ durch die übrigen $n - r$, setzt deren Werthe in (27) und differenzirt dann diese Grösse nach jeder der bleibenden Unbekannten, indem man jeden Differentialquotienten Null setzt; oder man fügt, wie in §. 4, zu (27) noch die Grösse

$$2k_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots - \alpha) + 2k_2(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots - \beta) + \ldots$$
$$+ 2k_r(\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2 + \ldots - \sigma)$$

hinzu, und differenzirt dann nach jeder der n Unbekannten, indem man wieder jeden Differentialquotienten Null setzt. Beide Wege geben begreiflich dasselbe.

Erste Auflösung.

Gesetzt, es folge aus (25):

$$\left.\begin{array}{l}x_1 = A_1 x_{r+1} + B_1 x_{r+2} + \ldots + L_1 x_n + a', \\ x_2 = A_2 x_{r+1} + B_2 x_{r+2} + \ldots + L_2 x_n + b', \\ \quad\vdots \\ x_r = A_r x_{r+1} + B_r x_{r+2} + \ldots + L_r x_n + l',\end{array}\right\} \quad (28)$$

wo die Grössen A, B, ..., L, a', ..., l' bestimmte Constanten sind, so werden die Gleichungen (26) nun sein, wenn man die Coëfficienten von x_{r+1} in der ersten, zweiten, ... derselben mit $(r+1)_1$, $(r+1)_2$, ...; die von x_{r+2} mit $(r+2)_1$, $(r+2)_2$, ... u. s. w. bezeichnet:

$$\begin{aligned}
&[(r+1)_1 + a_1 A_1 + b_1 A_2 + c_1 A_3 + \ldots]\, x_{r+1} \\
&+ [(r+2)_2 + a_1 B_1 + b_1 B_2 + c_1 B_3 + \ldots]\, x_{r+2} \\
&+ \ldots \qquad = M_1 - a' a_1 - b' b_1 - c' c_1 - \ldots, \\
&[(r+1)_2 + a_2 A_1 + b_2 A_2 + c_2 A_3 + \ldots]\, x_{r+1} \\
&[(r+2)_2 + a_2 B_1 + a_2 B_2 + c_2 B_3 + \ldots]\, x_{r+2} \\
&+ \ldots \qquad = M_2 - a' a_2 - b' b_2 - c' c_2 - \ldots \\
&\qquad \vdots
\end{aligned}$$

oder wenn man zur Abkürzung diese Gleichungen darstellt durch

$$\left.\begin{aligned}
I_1\, x_{r+1} + II_1\, x_{r+2} + III_1\, x_{r+3} + \ldots &= G_1, \\
I_2\, x_{r+1} + II_2\, x_{r+2} + III_2\, x_{r+3} + \ldots &= G_2, \\
I_3\, x_{r+1} + II_3\, x_{r+2} + III_3\, x_{r+3} + \ldots &= G_3, \\
\vdots \qquad &
\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

so können die G_1, G_2, ..., wegen der constanten Grössen $a' a_1 + b' b_1 + c' c_1$ u. s. w. ganz wohl als durch unmittelbare Beobachtung gegeben angesehen werden, wenigstens hat dies auf die Bestimmung des Gewichts von x_{r+1}, x_{r+2}, ... keinen Einfluss, wie aus §. 7 erhellt. Nebenbei gesagt, sind die (29) weiter Nichts, als die (26), in denen x_1, ..., x_r durch ihre Werthe ersetzt sind. Aus (29) folgt nun zur Bestimmung von x_{r+1}, ..., x_n ganz wie in §. 3:

$$\left.\begin{aligned}
[gI^2]\, x_{r+1} + [gI\,II]\, x_{r+2} + [gI\,III]\, x_{r+3} + \ldots &= [gIG], \\
[gI\,II]\, x_{r+1} + [gII^2]\, x_{r+2} + [gII\,III]\, x_{r+3} + \ldots &= [gIIG], \\
[gI\,III]\, x_{r+1} + [gII\,III]\, x_{r+2} + [g\,III^2]\, x_{r+3} + \ldots &= [gIIIG], \\
\vdots \qquad &
\end{aligned}\right\} (30)$$

und wenn man hieraus zieht

$$\left.\begin{aligned}
x_{r+1} &= A'[gIG] + A''[gIIG] + A'''[gIIIG] + \ldots, \\
x_{r+2} &= B'[gIG] + B''[gIIG] + B'''[gIIIG] + \ldots, \\
x_{r+3} &= C'[gIG] + C''[gIIG] + C'''[gIIIG] + \ldots, \\
&\vdots
\end{aligned}\right\} \quad (30')$$

so sind die Gewichte von $x_{r+1}, x_{r+2}, x_{r+3}, \ldots$ wie in §. 7 gleich $\frac{1}{A'}, \frac{1}{B''}, \frac{1}{C'''}, \ldots$.

Da weiter $x_1, \ldots, x_r$ durch (28) gegeben sind, so folgt aus §. 7, wenn man die dortige Grösse K mit jeder der Grössen $x_1, \ldots, x_r$ vergleicht, dass das Gewicht

von x_1 ist

$$\frac{1}{A_1(A_1A'+B_1A''+C_1A'''+\ldots)+B_1(A_1B'+B_1B''+C_1B'''+\ldots)+C_1(A_1C'+B_1C''+C_1C'''+\ldots)}$$

von x_2 ist

$$\frac{1}{A_2(A_2A'+B_2A''+C_2A'''+\ldots)+B_2(A_2B'+B_2B''+C_2B'''+\ldots)+C_2(A_2C'+B_2C''+C_2C'''+\ldots)}$$

u. s. w.

Man hätte auch sagen können, dass wenn man in (30) statt der zweiten Seiten gesetzt hätte

1) $A_1, B_1, \ldots, L_1$ und dann für $x_{r+1}, \ldots, x_n$ gefunden hätte $\xi_{r+1}, \ldots, \xi_n$, das Gewicht von x_1 gewesen wäre

$$\frac{1}{A_1\xi_{r+1}+B_1\xi_{r+2}+\ldots+L_1\xi_n};$$

2) $A_2, B_2, \ldots, L_2$ und die jetzt erhaltenen Werthe von $x_{r+1}, \ldots, x_n$ wären $v_{r+1}, v_{r+2}, \ldots v_n$, das Gewicht von x_2 wäre

$$\frac{1}{A_2v_{r+1}+B_2v_{r+2}+\ldots+L_2v_n},$$

u. s. w.

Zweite Auflösung.

In diesem Falle hat man nach §. 4 ausser den (25) noch:

$$\left.\begin{array}{l}[ga^2]x_1+[gab]x_2+[gac]x_3+\ldots+k_1\alpha_1+k_2\beta_1+\ldots+k_r\sigma_1=[gaM],\\ [gab]x_1+[gb^2]x_2+[gbc]x_3+\ldots+k_1\alpha_2+k_2\beta_2+\ldots+k_r\sigma_2=[gbM],\\ [gac]x_1+[gbc]x_2+[gc^2]x_3+\ldots+k_1\alpha_3+k_2\beta_3+\ldots+k_r\sigma_3=[gcM],\\ \vdots\end{array}\right\}\quad(31)$$

aus welchen Gleichungen nun [in Verbindung mit (25)] die Werthe von $x_1, x_2, \ldots, x_n, k_1, \ldots, k_r$ folgen, und natürlich für $x_1, \ldots, x_n$ dasselbe erhalten wird, wie bei der ersten Auflösung.

Gesetzt nun es folge hieraus

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= P_1[gaM] + P_2[gbM] + P_3[gcM] + \ldots + \delta_1, \\ x_2 &= Q_1[gaM] + Q_2[gbM] + Q_3[gcM] + \ldots + \delta_2, \\ x_3 &= R_1[gaM] + R_2[gbM] + R_3[gcM] + \ldots + \delta_3, \\ &\vdots \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

wo die δ_1, δ_2, δ_3, ... von den zweiten Seiten der Gleichungen (31) nicht abhängen, so behaupte ich, seien die Gewichte von x_1, x_2, x_3, ... gleich $\frac{1}{P_1}$, $\frac{1}{Q_2}$, $\frac{1}{R_3}$, ... genau wie in §. 7.

Zu dem Ende haben wir bloss zu zeigen, dass die Grösse $A_1 \xi_{r+1} + B_1 \xi_{r+2} + \ldots$ der vorigen Auflösung der Coëfficient von $[gaM]$ in dem Werthe von x_1 ist. Nun ist aber

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 x_{r+1} + B_1 x_{r+2} + \ldots + L_1 x_n + a' \\ &= (A_1 A' + B_1 B' + C_1 C' + \ldots)[gIG] \\ &+ (A_1 A'' + B_1 B'' + C_1 C'' + \ldots)[gIIG] \\ &+ (A_1 A''' + B_1 B''' + C_1 C''' + \ldots)[gIIIG] + \ldots + a'. \end{aligned}$$

Aber es ist

$$\begin{aligned} G &= M - a'a - b'b - c'c - \ldots, \\ I &= (r+1) + A_1 a + A_2 b + A_3 c + \ldots, \\ II &= (r+2) + B_1 a + B_2 b + B_3 c + \ldots, \\ &\vdots \end{aligned}$$

woraus leicht folgt, dass der Coëfficient von $[gaM]$ in dem Werthe von x_1 ist:

$$\begin{aligned} &(A_1 A' + B_1 B' + C_1 C' + \ldots) A_1 + (A_1 A'' + B_1 B'' + C_1 C'' + \ldots) B_1 \\ &\quad + (A_1 A''' + B_1 B''' + C_1 C''' + \ldots) C_1 + \ldots \\ &= A_1(A_1 A' + B_1 A'' + C_1 A''' + \ldots) + B_1(A_1 B' + B_1 B'' + C_1 B'' + \ldots) \\ &\quad + C_1(A_1 C' + B_1 C'' + C_1 C''' + \ldots) + \ldots, \end{aligned}$$

wodurch denn obige Behauptung gerechtfertigt ist. Dass aber dasselbe für alle x gilt, die nach (32) bestimmt sind, also auch für x_{r+1}, ... ist klar und lässt sich auch leicht beweisen. Sucht man nämlich in (30') in dem Werthe von x_{r+1} den Coëfficienten von $[g(r+1)M]$, so wird er gleich A' sein, da nur in gIG die Grösse $g(r+1)M$ vorkommt.

Damit ist dann auch die allgemeinste Aufgabe erledigt. Es kann sich dabei ereignen, dass die Grössen M der zweiten Seiten in (26) Null sind. In diesem Falle müsste man allerdings nicht 0 behalten, sondern etwa allgemeinere Zeichen, A, B, C, ... für die zweiten Seiten setzen, wie dies in (24) vorgeschrieben worden.

Wir wollen dies zunächst auf ein einfaches Beispiel anwenden. Gesetzt in einem ebenen Vierecke seien für die vier Winkel die Werthe α, β, γ, δ erhalten worden, welche man zugleich als Näherungswerthe dieser Winkel gelten lassen kann; die Gewichte dieser Bestimmungen seien g_1, g_2, g_3, g_4. Sind $x_1, \ldots, x_4$ die an $\alpha, \ldots, \delta$ anzubringenden Correctionen, so hat man also

$\alpha + x_1 = \alpha(\mathrm{G}.g_1)$, $\beta + x_2 = \beta(\mathrm{G}.g_2)$, $\gamma + x_3 = \gamma(\mathrm{G}.g_3)$, $\delta + x_4 = \delta(\mathrm{G}.g_4)$, d. h.

$$x_1 = 0\,(\mathrm{G}.g_1),\ x_2 = 0\,(\mathrm{G}.g_2),\ x_3 = 0\,(\mathrm{G}.g_3),\ x_4 = 0\,(\mathrm{G}.g_4),$$

woneben noch die Gleichung

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 360^0$$

bestehen muss. Setzt man $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^0 + e$, wo e bekannt ist, so hat man

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -e,$$

und es ist also

$$g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + g_3 x_3^2 + g_4 x_4^2 + 2k(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + e)$$

nach $x_1, \ldots, x_4$ zu diffenziren, so dass $x_1, \ldots, x_4$, k aus

$$g_1 x_1 + k = 0,\quad g_2 x_2 + k = 0,\quad g_3 x_3 + k = 0,\quad g_4 x_4 + k = 0,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -e$$

zu bestimmen sind. Will man aber die Gewichte von $x_1, \ldots, x_4$ ermitteln, so setze man

$$g_1 x_1 + k = A,\quad g_2 x_2 + k = B,\quad g_3 x_3 + k = C,\quad g_4 x_4 + k = D,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -e,$$

so wird der Coëfficient von A in x_1 das Gewicht von x_1, der von B in x_2 das von x_2 u. s. w. geben. Man zieht aus diesen Gleichungen:

$$x_1 = \frac{(A-B)g_3 g_4 + (A-C)g_2 g_4 + (A-D)g_2 g_3 - e g_2 g_3 g_4}{g_1 g_2 g_3 + g_1 g_2 g_4 + g_1 g_3 g_4 + g_2 g_3 g_4},$$
$$x_2 = \frac{(B-A)g_3 g_4 + (B-C)g_1 g_4 + (B-D)g_1 g_3 - e g_1 g_3 g_4}{g_1 g_2 g_3 + g_1 g_2 g_4 + g_1 g_3 g_4 + g_2 g_3 g_4},$$
$$x_3 = \frac{(C-A)g_2 g_4 + (C-B)g_1 g_4 + (C-D)g_1 g_2 - e g_1 g_2 g_4}{g_1 g_2 g_3 + g_1 g_2 g_4 + g_1 g_3 g_4 + g_2 g_3 g_4},$$
$$x_4 = \frac{(D-A)g_2 g_3 + (D-B)g_1 g_3 + (D-C)g_1 g_2 - e g_1 g_2 g_3}{g_1 g_2 g_3 + g_1 g_2 g_4 + g_1 g_3 g_4 + g_2 g_3 g_4}.$$

Die wahrscheinlichsten Werthe von $x_1, \ldots, x_4$ finden sich hieraus, wenn man $A = B = C = D = 0$ setzt. Für die Gewichte dieser Grössen erhält man aber

$$\frac{g_1 g_2 g_3 + g_1 g_2 g_4 + g_1 g_3 g_4 + g_2 g_3 g_4}{g_3 g_4 + g_2 g_4 + g_2 g_3}, \frac{g_1 g_2 g_3 + g_1 g_2 g_4 + g_1 g_3 g_4 + g_2 g_3 g_4}{g_3 g_4 + g_1 g_4 + g_1 g_3},$$

$$\frac{g_1 g_2 g_3 + g_1 g_2 g_4 + g_1 g_3 g_4 + g_2 g_3 g_4}{g_2 g_4 + g_1 g_4 + g_1 g_2}, \frac{g_1 g_2 g_3 + g_1 g_2 g_4 + g_1 g_3 g_4 + g_2 g_3 g_4}{g_2 g_3 + g_1 g_3 + g_1 g_2}.$$

In dem speciellen Falle, da $g_1 = g_2 = g_3 = g_4$ ist jede dieser Grössen $= \frac{4}{3} g_1$.

Hätte man diese Aufgabe nach der ersten Art aufgelöst, so hätte man

$$x_4 = - e - x_1 - x_2 - x_3,$$

so dass

$$g_1 x_1^2 + g_2 x_2^2 + g_3 x_3^2 + g_4 (e + x_1 + x_2 + x_3)^2$$

ein Minimum werden müsste. Man hat also

$$g_1 x_1 + g_4 (e + x_1 + x_2 + x_3) = 0,$$
$$g_2 x_2 + g_4 (e + x_1 + x_2 + x_3) = 0,$$
$$g_3 x_3 + g_4 (e + x_1 + x_2 + x_3) = 0,$$

woraus x_1, x_2, x_3 folgen. Setzt man aber statt dieser Gleichungen:

$$(g_1 + g_4) x_1 + g_4 x_2 + g_4 x_3 = A,$$
$$g_4 x_1 + (g_1 + g_4) x_3 + g_4 x_3 = B,$$
$$g_4 x_1 + g_4 x_2 + (g_3 + g_4) x_3 = C,$$

so erhält man

$$x_1 = \frac{(g_2 g_3 + g_3 g_4 + g_2 g_4) A - g_3 g_4 B - g_2 g_4 C}{g_1 g_2 g_3 + g_2 g_3 g_4 + g_1 g_3 g_4 + g_1 g_2 g_4},$$

$$x_2 = \frac{(g_1 g_3 + g_3 g_4 + g_1 g_4) B - g_3 g_4 A - g_1 g_4 C}{g_1 g_2 g_3 + g_2 g_3 g_4 + g_1 g_3 g_4 + g_1 g_2 g_4},$$

$$x_3 = \frac{(g_1 g_2 + g_2 g_4 + g_1 g_4) C - g_1 g_4 B - g_2 g_4 A}{g_1 g_2 g_3 + g_2 g_3 g_4 + g_1 g_3 g_4 + g_1 g_2 g_4}.$$

Die wahren Werthe von x_1, x_2, x_3 folgen hieraus, wenn man $A = B = C = - g_4 e$ setzt. Dividirt man 1 durch den Coëfficienten von A in x_1, durch den von B in x_2, von C in x_3, so erhält man die Gewichte von x_1, x_2, x_3 genau wie soeben. Setzt man statt A, B, C in den obigen Gleichungen durchweg -1 (da $x_4 = - x_1 - x_2 - x_3 - e$), so ergiebt sich

$$\xi_1 = \frac{- g_2 g_3}{J}, \quad \xi_2 = \frac{- g_1 g_3}{J}, \quad \xi_3 = \frac{- g_1 g_2}{J},$$

wo J den gemeinschaftlichen Nenner bezeichnet, da hier $A_1 = B_1 = C_1 = - 1$, so ist also das Gewicht von x_4:

$$\frac{1}{\frac{g_2 g_3}{J} + \frac{g_1 g_3}{J} + \frac{g_1 g_2}{J}} = \frac{J}{g_2 g_3 + g_1 g_3 + g_1 g_2},$$

ebenfalls wie oben.

Wollte man in dem Beispiele IV. des §. 5 die Gewichte jeder der 12 Correctionen, also auch der 12 endgültig gefundenen Winkel, bestimmen, so müsste man folgende 17 Gleichungen auflösen:

$$
\begin{aligned}
&40(1) + k_2 = A_1, \quad 20(2) - k_2 - k_5 = A_2, \quad 20(3) + k_5 = A_3, \\
&30(4) - k_1 = A_4, \quad 10(5) + k_1 + k_2 = A_5, \quad 30(6) - k_1 = A_6, \\
&30(7) + k_2 - k_3 = A_7, \quad 30(8) + k_4 = A_8, \quad 20(9) + k_3 = A_9, \\
&40(10) - k_3 - k_4 - k_4 = A_{10}, \quad 25(11) + k_2 = A_{11}, \quad 50(12) - k_5 = A_{12}, \\
&(5) - (4) - (6) = 9{,}75, \quad (7) - (2) + (1) + (5) = 4{,}64, \\
&(9) - (7) - (10) = 1{,}12, \quad (11) - (10) + (8) = 18{,}46, \\
&(3) - (2) - (10) - (12) = 24{,}68,
\end{aligned}
$$

und wenn dann die Einheit dividirt wird durch den Coëfficienten von A_1 im Werthe von (1), den von A_2 im Werthe von (2),..., den von A_{12} im Werthe von (12), so hat man die Gewichte von (1), (2), ..., (12), d. h. der 12 zu bestimmenden Winkel. Man sieht leicht, dass wenn man nur diese Gewichte bestimmen will, man in den 5 letzten obiger 17 Gleichungen für die zweiten Seiten Null setzen kann.

Die in den obigen Rechnungen vorkommenden Grössen g_1, g_2, ..., g_m müssen als zum Voraus bekannt angesehen werden, entweder indem ein Resultat durch Anwendung des Satzes vom arithmetischen Mittel erhalten worden (§. 8), oder sonst wie. Eine ungefähre Schätzung der Gewichte ist jedoch selten anzurathen, da man sich hierin sehr leicht täuscht, ja gewisse Beobachtungsweisen mit einem Vorurtheile in Bezug auf ihre Güte zu betrachten pflegt. Es ist daher immer am gerathensten, wo möglich gleich genaue Beobachtungen anzuwenden, und einfache Beobachtungen lieber als gleich genau anzunehmen, wenn man auch weiss, dass sie dies nicht geradezu sind. Sind aber die g_1, ..., g_m bekannt, so kann man, dem Vorstehenden gemäss, die Gewichte der gesuchten Unbekannten, sowie beliebiger Functionen derselben, in allen möglichen Fällen bestimmen. Kennte man noch den zu einer Beobachtung vom Gewichte 1 gehörigen wahrscheinlichen Fehler r, so würde man (nach 3), da die Gewichte sich umge-

kehrt verhalten, wie die Quadrate der wahrscheinlichen Fehler, diesen wahrscheinlichen Fehler für jede der Grössen, deren Gewicht man kennt, ermitteln können. Es handelt sich also endlich nur noch um die etwa mögliche Bestimmung jener Grösse r.

§. 10.

Bestimmung des wahrscheinlichen Fehlers einer Beobachtung vom Gewichte 1 aus den gegebenen Beobachtungen.

Seien wieder wie in §. 3 $h_1, h_2, \ldots, h_m$ die Maasse der Genauigkeit der Beobachtungen, deren Gewichte $g_1, g_2, \ldots, g_m$ seien; sei ferner h das Maass der Genauigkeit einer Beobachtung vom Gewichte 1, so ist (§. 3)

$$h_1^2 = g_1 h^2, \quad h_2^2 = g_2 h^2, \ldots, \quad h_m^2 = g_m h^2.$$

Unter der Annahme nun, dass man für h den rechten Werth gewählt habe, ist die (theoretische d. h. zum Voraus berechnete) Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintreffens der Beobachtungsfehler $v_1, v_2, \ldots, v_m$ (gemäss (7) in §. 3):

$$\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m \sqrt{g_1 g_2 \ldots g_m}\, h^m}{\sqrt{\pi}^m} e^{-[gv^2]h^2}.$$

Diese Grösse ändert sich mit dem Werthe von h, so dass die Annahme eines beliebigen Werthes von h als eine Ursache anzusehen ist, aus der als Wirkung obige Wahrscheinlichkeit fliesst; nach der uns nun bekannten Schlussweise (Einl. VI.) ist also die Wahrscheinlichkeit, ein gewählter Werth von h sei der rechte, gleich

$$\frac{h^m \varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m \frac{\sqrt{g_1 g_2 \ldots g_m}}{\sqrt{\pi}^m} e^{-h^2[gv^2]}}{\sum \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m \sqrt{g_1 g_2 \ldots g_m}\, h^m}{\sqrt{\pi}^m} e^{-h^2[gv^2]}} = \frac{h^m e^{-h^2[gv^2]}}{\Sigma h^m e^{-h^2[gv^2]}},$$

wo Σ sich auf alle möglichen Werthe von h erstreckt. Diese Werthe gehen aber von 0 bis ∞, so dass wenn ε eine unendlich kleine Grösse bedeutet, diese Wahrscheinlichkeit ist

$$\frac{\varepsilon h^m e^{-h^2[gv^2]}}{\Sigma \varepsilon h^m e^{-h^2[gv^2]}} = \frac{\varepsilon h^m e^{-h^2[gv^2]}}{\int\limits_0^\infty h^m e^{-h^2[gv^2]} dh}.$$

In Ermangelung anderweitiger Kenntnisse wird man nun denjenigen Werth von h wählen, der diese Grösse zu einem Maximum macht. Der Nenner ist eine Constante; differenzirt man den Zähler nach h und setzt das Resultat Null, so ist

$$m h^{m-1} e^{-h^2[gv^2]} - 2 h^{m+1} [gv^2] e^{-h^2[gv^2]} = 0,$$

$$h^{m-1} e^{-h^2[gv^2]} (m - 2h^2 [gv^2]) = 0,$$

also da nicht $h^{m-1} = 0$, und nicht $e^{-h^2[gv^2]} = 0$, so ist $m - 2h^2[gv^2] = 0$, d. h.

$$h^2 = \frac{m}{2[gv^2]}. \qquad (33)$$

Hat man nach dieser Gleichung h bestimmt, so ergiebt sich der wahrscheinliche Fehler der Beobachtung vom Gewichte 1 mittelst der Gleichung $rh = \varrho$ (§. 3).

Was nun aber die Summe $[gv^2]$ in (33) anbelangt, so sind darin durch die v die wahren Beobachtungsfehler bezeichnet, deren Berechnung die Kenntniss der wahren Werthe von x, y, z, ... statt der wahrscheinlichsten erfordern würde.

Gesetzt man habe in die Gleichungen (6), oder (13), oder (13′) die nach dem Grundsatze der kleinsten Quadratsummen berechneten Werthe von $x, y, z, \ldots$, oder $x', y', z', \ldots$ eingesetzt und dadurch die Werthe $v_1, v_2, \ldots, v_m$ nach (6′) berechnet, so quadrire man diese Werthe und bilde die Summe $g_1 v_1^2 + g_2 v_2^2 + \cdots + g_m v_m^2$, die der Kürze halber mit $[gv_0^2]$ bezeichnet werden möge, so wird diese Summe nothwendig kleiner sein als $[gv^2]$, da ja nach eben dem Grundsatze der kleinsten Quadratsummen die Grösse $[gv_0^2]$ das Minimum von $[gv^2]$ ist*). Wollten wir also in (33) für $[gv^2]$ kurzweg $[gv_0^2]$ setzen, so würden wir h sicherlich zu gross, also r zu klein finden, und wir müssen uns also nach einem Verfahren umsehen, das uns — nicht den wahren Werth von $[gv^2]$, den wir wegen Unkenntniss der wahren Werthe der Unbekannten nicht ermitteln können — doch einen mehr richtigen Werth dieser Grösse liefern. Wir beachten

---

*) Hat man den allgemeinen Fall des §. 9 im Auge, so ist

$$[gv_0^2] = g_1(a_1 x_1 + b_1 x_2 + \ldots - M_1)^2 + g_2(a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots - M_2)^2 + \ldots$$
$$+ g_m(a_m x_1 + b_m x_2 + \ldots - M_m)^2,$$

wo für $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die nach jenem §. gefundenen Werthe einzusetzen sind, die, wie oben gesagt, die Grösse zweiter Seite zu einem Minimum machen.

zu dem Ende, dass zur Ermittelung des wahren Werthes von $[gv^2]$, wie gesagt, die Kenntniss der wahren Werthe der Unbekannten nöthig wäre. Diese wahren Werthe aber zu bestimmen, haben wir kein Mittel; wir wissen bloss, dass sie von den bestimmten wahrscheinlichsten Werthen der Unbekannten nicht viel abweichen. Theoretisch jedoch müssen wir jede beliebige Abweichung als zulässig erachten, obgleich nicht jede solche Abweichung gleich wahrscheinlich ist. Für jede andere Abweichung der wahren Werthe von den wahrscheinlichsten nimmt die Differenz $[gv^2] - [gv_0^2]$ auch einen anderen Werth an, und wir wollen nun, als den annehmbarsten Werth dieser Differenz den mittleren Werth aller dieser möglichen Werthe (§. 4) wählen, dabei jedoch natürlich darauf Rücksicht nehmen, in wie weit jede einzelne Abweichung mehr oder minder wahrscheinlich ist.

Bestimmung des mittleren Werthes der Differenz $[gv^2] - [gv_0^2]$.

Ehe wir hiezu übergehen können, wollen wir diese Differenz zunächst unter einer etwas anderen Form darstellen. Fassen wir dabei sogleich den in §. 9 betrachteten Fall, als den allgemeinsten ins Auge, so werden in den Gleichungen (29) nur noch $n-r$ der n Unbekannten vorhanden sein, da die anderen r mittelst der Gleichungen (25) durch jene $n-r$ ausgedrückt sind. Wir wollen als besonderen Fall einmal annehmen, es sei $n-r=3$, d. h. es seien in den (29) nur noch drei Unbekannte, die wir etwa mit ξ, v, ζ bezeichnen wollen. Die durch die Gleichungen (30) gegebenen wahrscheinlichsten Werthe derselben seien ξ_0, v_0, ζ_0, so dass also

$$\left.\begin{aligned}
[gI^2]\,\xi_0 + [gI\,II]\,v_0 + [gI\,III]\,\zeta_0 &= [gIG],\\
[gI\,II]\,\xi_0 + [gII^2]\,v_0 + [gII\,III]\,\zeta_0 &= [gIIG],\\
[gI\,III]\,\xi_0 + [gII\,III]\,v_0 + [gIII^2]\,\zeta_0 &= [gIIIG].
\end{aligned}\right\} \quad (a)$$

Setzt man nun

$$\xi = \xi_0 + \varDelta\xi, \quad v = v_0 + \varDelta v, \quad \zeta = \zeta_0 + \varDelta\zeta,$$

wo also $\varDelta\xi$, $\varDelta v$, $\varDelta\zeta$ die an ξ_0, v_0, ζ_0 anzubringenden Verbesserungen sind, so ist für diesen Fall

$$[gv^2]-[gv_0^2]$$
$$=g_1\{I_1(\xi_0+\varDelta\xi)+II_1(v_0+\varDelta v)+III_1(\zeta_0+\varDelta\zeta)-G_1\}^2$$
$$+g_2\{I_2(\xi_0+\varDelta\xi)+II_2(v_0+\varDelta v)+III_2(\zeta_0+\varDelta\zeta)-G_2\}^2$$
$$+g_3\{I_3(\xi_0+\varDelta\xi)+II_3(v_0+\varDelta v)+III_3(\zeta_0+\varDelta\zeta)-G_3\}^2$$
$$-g_1(I_1\xi_0+II_1v_0+III_1\zeta_0-G_1)^2-g_2(I_2\xi_0+II_2v_0+III_2\zeta_0-G_2)^2$$
$$-g_3(I_3\xi_0+II_3v_0+III_3\zeta_0-G_3)^2$$
$$=2g_1(I_1\xi_0+II_1v_0+III_1\zeta_0-G_1)(I_1\varDelta\xi+II_1\varDelta v+III_1\varDelta\zeta)$$
$$+2g_2(I_2\xi_0+II_2v_0+III_2\zeta_0-G_2)(I_2\varDelta\xi+II_2\varDelta v+III_2\varDelta\zeta)$$
$$+2g_3(I_3\xi_0+II_3v_0+III_3\zeta_0-G_3)(I_3\varDelta\xi+II_3\varDelta v+III_3\varDelta\zeta)$$
$$+g_1(I_1\varDelta\xi+II_1\varDelta v+III_1\varDelta\zeta)^2+g_2(I_2\varDelta\xi+II_2\varDelta v+III_2\varDelta\zeta)^2$$
$$+g_3(I_3\varDelta\xi+II_3\varDelta v+III_3\varDelta\zeta)^2$$
$$=2\varDelta\xi\{[gI^2]\xi_0+[gI\,II]v_0+[gI\,III]\zeta_0-[gIG]\}$$
$$+2\varDelta v\{[gI\,II]\xi_0+[gII^2]v_0+[gII\,III]\zeta_0-[gIIG]\}$$
$$+2\varDelta\zeta\{[gI\,III]\xi_0+[gII\,III]v_0+[gIII^2]\zeta_0-[gIIIG]\}$$
$$+[g(I\varDelta\xi+II\varDelta v+III\varDelta\zeta)^2]$$
$$=[g(I\varDelta\xi+II\varDelta v+III\varDelta\zeta)^2]\ \text{(nach }(a)).$$

Also ist
$$[gv^2]-[gv_0^2]=g_1(I_1\varDelta\xi+II_1\varDelta v+III_1\varDelta\zeta)^2$$
$$+g_2(I_2\varDelta\xi+II_2\varDelta v+III_2\varDelta\zeta)^2+g_3(I_3\varDelta\xi+II_3\varDelta v+III_3\varDelta\zeta)^2.$$

Entwickelt man die Quadrate der zweiten Seiten, so wird man haben
$$[gv^2]-[gv_0^2]=A\varDelta\xi^2+2B\varDelta\xi\varDelta v+C\varDelta v^2+2D\varDelta\xi\varDelta\zeta$$
$$+2E\varDelta v\varDelta\zeta+F\varDelta\zeta^2,$$
wo $A,\ldots,F$ leicht aus dem Vorigen bestimmt werden können. Setzt man nun
$$A\varDelta\xi+B\varDelta v+D\varDelta\zeta=\varphi_1,$$
so ist
$$[gv^2]-[gv_0^2]-\frac{\varphi_1^2}{A}=A'\varDelta v^2+2B'\varDelta v\varDelta\zeta+C'\varDelta\zeta^2,$$
wo wieder A', B', C' leicht zu bestimmen sind, jedenfalls aber kein $\varDelta\xi$, $\varDelta v$, $\varDelta\zeta$ enthalten. Setzt man weiter
$$A'\varDelta v+B'\varDelta\zeta=\varphi_2,$$
so ist
$$[gv^2]-[gv_0^2]-\frac{\varphi_1^2}{A}-\frac{\varphi_2^2}{A'}=A''\varDelta\zeta^2,$$
und wenn endlich
$$A''\varDelta\zeta=\varphi_3,$$

so hat man

$$[gv^2] - [gv_0^2] - \frac{\varphi_1^2}{A} - \frac{\varphi_2^2}{A'} - \frac{\varphi_3^2}{A''} = 0,$$

$$[gv^2] - [gv_0^2] = \frac{\varphi_1^2}{A} + \frac{\varphi_2^2}{A'} + \frac{\varphi_3^2}{A''}.$$

Daraus folgt, dass wenn $n - r = i$ man allgemein wird setzen können:

$$[gv^2] - [gv_0^2] = k_1 \varphi_1^2 + k_2 \varphi_2^2 + \cdots + k_i^2 \varphi_i^2, \qquad (b)$$

wo $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ lineare Functionen der Verbesserungen der $n-r$ unabhängigen Unbekannten in den Gleichungen (29) sind, und zwar von folgenden Formen:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= A\varDelta x_{r+1} + B\varDelta x_{r+2} + C\varDelta x_{r+3} + \cdots + M\varDelta x_n,\\
\varphi_2 &= \qquad\qquad B'\varDelta x_{r+2} + C'\varDelta x_{r+3} + \cdots + M'\varDelta x_n,\\
\varphi_3 &= \qquad\qquad\qquad\qquad C''\varDelta x_{r+3} + \cdots + M''\varDelta x_n,\\
&\vdots\\
\varphi_i &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad M^{(i)}\varDelta x_n.
\end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Da $[gv^2] - [gv_0^2]$ wesentlich positiv ist, so sind auch $k_1, \ldots, k_i$ nur positiv, wie sich ohnehin durch das Endresultat herausstellen wird.

Es folgt aus den Gleichungen (c), dass wenn man $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ kennt, man auch $\varDelta x_{r+1}, \ldots, \varDelta x_n$ leicht finden kann, so dass man die ersten Grössen statt der letzteren wird in Betrachtung ziehen können. Es wird nun unsere Aufgabe sein, den mittleren Werth jeder der Grössen $k_1 \varphi_1^2, \ldots, k_i \varphi_i^2$ zu bestimmen. Zu dem Ende beachten wir, dass $\varDelta x_{r+1}, \ldots, \varDelta x_n$, also auch $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ alle möglichen Werthe annehmen können, dass aber diese möglichen Werthe keineswegs gleich wahrscheinlich sind.

Es war nun die zum Voraus berechnete Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Eintreffens der wahren Beobachtungsfehler $v_1, \ldots, v_m$ (§. 3)

$$c e^{-h^2[gv^2]}, \quad c = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_m h^m \sqrt{g_1 \ldots g_m}}{\sqrt{\pi^m}}. \qquad (d)$$

Wählt man nun ein System der $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$, so werden dadurch gewisse $v_1, \ldots, v_m$ erscheinen, und sie werden andere sein, wenn ein anderes System gewählt wird. Man wird also auch sagen können, es drücke die Grösse (d) die Wahrscheinlichkeit aus, dass unter der Annahme eines Systems von Werthen

für $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ als den rechten Werthen dieser Grössen, die Beobachtungen $F_1, \ldots, F_m$ gemacht, also die Fehler $v_1, \ldots, v_m$ begangen worden. Nach der uns nun bekannten Schlussweise (Einl. VI.) wird also, da die Beobachtungen $F_1, \ldots, F_m$ gemacht worden, die Wahrscheinlichkeit, das angenommene System sei das rechte, sein

$$\frac{c\, e^{-h^2[gv^2]}}{\Sigma\Sigma \ldots c\, e^{-h^2[gv^2]}},$$

wo $\Sigma\Sigma \ldots$ sich auf alle möglichen Werthe von $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ bezieht, wo man also $[gv^2]$ nach (b) zu ersetzen hat. Beachtet man dass c, $e^{-h^2[gv_0^2]}$ kein $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ enthalten, so ist diese Grösse gleich

$$\frac{e^{-h^2(k_1\varphi_1^2 + \ldots + k_i\varphi_i^2)}}{\Sigma\Sigma \ldots e^{-h^2(k_1\varphi_1^2 + \ldots + k_i\varphi_i^2)}},$$

oder (da $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen können) wenn $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_i$ unendlich kleine (auf $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ sich beziehende) Grössen sind, so ist dieselbe

$$\frac{e^{-h^2(k_1\varphi_1^2 + \ldots + k_i\varphi_i^2)}\,\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_i}{\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\cdots\!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2(k_1\varphi_1^2 + \ldots + k_i\varphi_i^2)}\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_i}$$

$$= \frac{e^{-h^2k_1\varphi_1^2}\varepsilon_1 \ldots e^{-h^2k_2\varphi_2^2}\varepsilon_2 \ldots e^{-h^2k_i\varphi_i^2}\varepsilon_i}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2k_1\varphi_1^2}\, d\varphi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2k_2\varphi_2^2}\, d\varphi_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2k_i\varphi_i^2}\, d\varphi_i}.$$

Wollen wir hieraus die Wahrscheinlichkeit ermitteln, es sei der angenommene Werth von φ_1 der wahre, was auch $\varphi_2, \ldots, \varphi_i$ seien, so werden wir, nach der aus §. 6, II. uns nun bekannten Schlussweise nach $\varphi_2, \ldots, \varphi_i$ zu summiren haben, so dass dieselbe ist

$$\frac{e^{-h^2k_1\varphi_1^2}\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2k_2\varphi_2^2}\, d\varphi_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2k_i\varphi_i^2}\, d\varphi_i}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2k_1\varphi_1^2}\, d\varphi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2k_2\varphi_2^2}\, d\varphi_2 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2k_i\varphi_i^2}\, d\varphi_i}$$

$$= \frac{e^{-h^2k_1\varphi_1^2}\varepsilon_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2k_1\varphi_1^2}\, d\varphi_1} = \frac{h\sqrt{k_1}}{\sqrt{\pi}}\, e^{-h^2k_1\varphi_1^2}\varepsilon_1.$$

Hieraus folgt nun für die Wahrscheinlichkeiten, angenommene Werthe von $\varphi_1, \ldots, \varphi_i$ seien die wahren Werthe dieser Grössen, was auch die Werthe jeweils der übrigen sind:

$$\frac{h\sqrt{k_1}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 k_1 \varphi_1^2} \varepsilon_1, \quad \frac{h\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 k_2 \varphi_2^2} \varepsilon_2, \ldots, \quad \frac{h\sqrt{k_i}}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 k_i \varphi_i^2} \varepsilon_i, \qquad (e)$$

woraus denn nachträglich zu ersehen ist, dass $k_1, \ldots, k_i$ positiv sein müssen.

Bestimmung des mittleren Werthes von $k_1 \varphi_1^2$.

Nunmehr wenden wir uns zur Bestimmung des mittleren Werthes von $k_1 \varphi_1^2$. Setzen wir $h\sqrt{k_1} = k$, so folgt aus (e), es sei die Wahrscheinlichkeit, ein beliebig angenommener Werth von φ_1 sei der wahre Werth dieser Grösse, was auch die Werthe von $\varphi_2, \ldots, \varphi_i$ sein mögen:

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} e^{-k^2 \varphi_1^2} \varepsilon_1 \qquad (e')$$

Daraus folgt, wie in §. 2, dass die Wahrscheinlichkeit, der wahre Werth von φ_1 liege zwischen den Werthen a und b, ist

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-k^2 \varphi^2} d\varphi,$$

und wenn $a = -b$, so drückt die Grösse

$$\frac{k}{\sqrt{\pi}} \int_{-b}^{+b} e^{-k^2 \varphi^2} d\varphi = \frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+b} e^{-k^2 \varphi^2} d\varphi$$

aus, es liege der wahre Werth von φ_1 zwischen $-b$ und $+b$. Die Grösse (e') sagt ferner, dass positive und negative Werthe von φ_1 gleich wahrscheinlich seien. Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit, es liege φ_1 zwischen $-a$ und $-b$, dieselbe sein müsse, als die es liege φ_1 zwischen $+a$ und $+b$, so dass die Wahrscheinlichkeit, φ_1 liege seinem absoluten Werthe nach zwischen a und b ($b > a$), ist

$$\frac{2k}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-k^2 \varphi^2} d\varphi. \qquad (f)$$

Setzt man hier $k\varphi = z$, so wird das Integral $= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{ak}^{bk} e^{-z^2}\, dz$, und wenn $ak = a'$, $bk = b'$, so drückt also

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a'}^{b'} e^{-z^2} dz \qquad (f')$$

die Wahrscheinlichkeit aus, der wahre Werth von φ_1 liege zwischen $\frac{a'}{k}$ und $\frac{b'}{k}$, abgesehen vom Zeichen. Man kann deshalb auch sagen (§. 2), dass von m möglichen Werthen von φ_1 ihrer $\frac{2m}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{a'}^{b'} e^{-z^2} dz$ zwischen $\frac{a'}{k}$ und $\frac{b'}{k}$ liegen werden, was um so wahrer ist, je grösser m ist.

Wir wollen nun eine ganze Reihe möglicher Werthe von a' und b' uns denken, gehend von 0 bis ∞, und die um den unendlich kleinen Unterschied ε fortschreiten, so werden nach dem Vorstehenden, von m möglichen Werthen von φ_1 liegen

zwischen 0 und $\frac{\varepsilon}{k}$ ihrer $\frac{2m}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{\varepsilon} e^{-z^2} dz = \frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-0^2} \varepsilon$,

" $\frac{\varepsilon}{k}$ " $\frac{2\varepsilon}{k}$ " $\frac{2m}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\varepsilon}^{2\varepsilon} e^{-z^2} dz = \frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2} \varepsilon$,

" $\frac{2\varepsilon}{k}$ " $\frac{3\varepsilon}{k}$ " $\frac{2m}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{2\varepsilon}^{3\varepsilon} e^{-z^2} dz = \frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-(2\varepsilon)^2} \varepsilon$,

" $\frac{3\varepsilon}{k}$ " $\frac{4\varepsilon}{k}$ " $\frac{2m}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{3\varepsilon}^{4\varepsilon} e^{-z^2} dz = \frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-(3\varepsilon)^2} \varepsilon$,

$\vdots$

was desshalb richtig ist, weil die Gränzen der Integrale unendlich wenig verschieden sind, sich daher das Integral nur auf ein einziges Element reducirt. Dabei ist verstanden, dass z. B. die $\frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-(2\varepsilon)^2} \varepsilon$ Werthe von φ_1 zur Hälfte zwischen $\frac{2\varepsilon}{k}$ und $\frac{3\varepsilon}{k}$

und zur Hälfte zwischen $-\frac{2\varepsilon}{k}$ und $-\frac{3\varepsilon}{k}$ liegen. Die Werthe von φ_1^2 sind innerhalb dieser beiden Theile dieselben, und da diese Gränzen jeweils unendlich wenig verschieden sind, so behält innerhalb desselben Intervalls φ_1, also auch φ_1^2 immer denselben Werth. Man wird also sagen können, dass es gebe bei m möglichen Werthen von φ_1:

ihrer $\frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-0^2}\varepsilon$ Werthe von φ_1^2, jeder $= 0^2$,

deren Summe $= \frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-0^2}\varepsilon \,.\, 0^2$,

ihrer $\frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2}\varepsilon$ Werthe von φ_1^2, jeder $= \left(\frac{\varepsilon}{k}\right)^2$,

deren Summe $= \frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-\varepsilon^2}\varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^2}{k^2}$,

ihrer $\frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-(2\varepsilon)^2}\varepsilon$ Werthe von φ_1^2, jeder $= \left(\frac{2\varepsilon}{k}\right)^2$,

deren Summe $= \frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-(2\varepsilon)^2}\varepsilon \,.\, \frac{(2\varepsilon)^2}{k^2}$,

ihrer $\frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-(3\varepsilon)^2}\varepsilon$ Werthe von φ_1^2, jeder $= \left(\frac{3\varepsilon}{k}\right)^2$,

deren Summe $= \frac{2m}{\sqrt{\pi}} e^{-(3\varepsilon)^2}\varepsilon \cdot \frac{(3\varepsilon)^2}{k^2}$.

$$\vdots$$

Die Summe aller Werthe von φ_1^2 ist demnach

$$\frac{2m\varepsilon}{k^2\sqrt{\pi}}\left[e^{-0^2}.\,0^2 + e^{-\varepsilon^2}.\,\varepsilon^2 + e^{-(2\varepsilon)^2}.\,(2\varepsilon)^2 + e^{-(3\varepsilon)^2}(3\varepsilon)^2 + \cdots\right],$$

worin die Vielfachen von ε bis zum Unendlichen gehen. Daraus folgt, dass diese Summe

$$\frac{2m}{k^2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-z^2} z^2\,dz = \frac{m}{2k^2}$$

ist. Da die Anzahl der Werthe m ist, so ist der mittlere Werth (§. 4) $= \frac{1}{2k^2}$, worin m nicht vorkommt, und wir uns also m ganz wohl als unendlich denken können. Setzt man für k seinen

Werth, so ist also der mittlere Werth von φ_1^2: $\frac{1}{2k_1h^2}$, mithin von $k_1\varphi_1^2$: $\frac{1}{2h^2}$. Daraus ergiebt sich nun, dass der mittlere Werth von

$$k_1\varphi_1^2 + \cdots + k_i\varphi_i^2 \text{ gleich } \frac{i}{2h^2} = \frac{n-r}{2h^2} \text{ ist.}$$

Demnach werden wir setzen

$$[gv^2] - [gv_0^2] = \frac{n-r}{2h^2},$$

und zwar mit möglichster Näherung. Da nach (33): $[gv^2] = \frac{m}{2h^2}$, so ist also

$$\frac{m}{2h^2} - [gv_0^2] = \frac{n-r}{2h^2},$$

woraus

$$h^2 = \frac{m-n+r}{2[gv_0^2]}, \qquad (33')$$

welche Gleichung als möglichste Näherung muss angesehen werden.

Wir ziehen daraus:

1) wenn keine Bedingungsgleichungen gegeben sind,

und ihrer n Unbekannte mittelst m Beobachtungen zu bestimmen sind, man also im Falle des §. 7 ist, wobei $r=0$, so wird das Maass der Genauigkeit einer Beobachtung vom Gewichte 1 gleich sein $\sqrt{\frac{m-n}{2[gv_0^2]}}$, also der wahrscheinliche Fehler dieser Beobachtung

$$= \varrho\sqrt{2}\sqrt{\frac{[gv_0^2]}{m-n}} = 0{,}6744897\sqrt{\frac{[gv_0^2]}{m-n}}.$$

2) Wenn r Bedingungsgleichungen

zwischen den n Unbekannten gegeben sind, und ausserdem noch m Beobachtungen, wo also der Fall des §. 9 eintritt, so ist das Maass der Genauigkeit einer Beobachtung vom Gewichte 1 gleich $\sqrt{\frac{m-n+r}{2[gv_0^2]}}$, und der wahrscheinliche Fehler dieser Beobachtung $= 0{,}6744897\sqrt{\frac{[gv_0^2]}{m-n+r}}$.

Kennt man nun den wahrscheinlichen Fehler einer Beobach-

tung vom Gewichte 1, so kann man leicht den jeder anderen Beobachtung oder daraus bestimmten Grösse, deren Gewicht man kennt, ermitteln, indem die Gewichte sich umgekehrt verhalten, wie die Quadrate der wahrscheinlichen Fehler. Es bleibt uns freilich noch zu ermitteln, welches Gewicht man der nunmehr durchgeführten Bestimmung von h beizulegen habe. Vorher aber wollen wir zunächst einige Beispiele näher betrachten.

§. 11.

Beispiele zum Vorstehenden. Berechnung von $[gv_0^2]$.

1) Für das erste Beispiel des §. 5 findet man, indem man jeden beobachteten Werth von dem ermittelten Werth abzieht, folgende Werthe von v:

$v_1 = 8{,}086$, $v_2 = -6{,}914$, $v_3 = 2{,}086$, $v_4 = -7{,}914$,
$v_5 = -14{,}914$, $v_6 = 7{,}086$, $v_7 = -6{,}414$, $v_8 = 9{,}086$,
$v_9 = 3{,}086$, $v_{10} = 3{,}086$, $v_{11} = -6{,}914$, $v_{12} = -1{,}914$,
$v_{13} = -8{,}414$, $v_{14} = -5{,}914$, $v_{15} = -3{,}914$, $v_{16} = 13{,}086$,
$v_{17} = -2{,}914$, $v_{18} = -4{,}914$, $v_{19} = -1{,}914$, $v_{20} = -2{,}414$,
$v_{21} = -0{,}914$, $v_{22} = 7{,}086$, $v_{23} = -5{,}914$, $v_{24} = 9{,}086$,
$v_{25} = 14{,}086$, $v_{26} = 15{,}086$, $v_{27} = -3{,}414$, $v_{28} = -4{,}914$,
$v_{29} = -0{,}414$.

Da sämmtliche $g = 1$, so ist jetzt $[gv_0^2] = 1612$, also da $m = 29$, $n = 1$, der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1 gleich $0{,}6745\sqrt{\frac{1612}{28}} = 5{,}118$, und der wahrscheinliche Fehler von x: $\frac{5{,}118}{\sqrt{29}} = 0{,}950$. Man kann also eins gegen eins wetten, es liege der wahre Werth von x zwischen $5{,}086 + 0{,}950 = 6{,}036$ und $5{,}086 - 0{,}950 = 4{,}136$.

Da man den wahrscheinlichen Fehler jeder einzelnen Beobachtung kennt, so kann man nach §. 2 auch die Lage der Beobachtungsfehler ermitteln. Jetzt ist das dortige $h = \frac{\varrho}{r} =$

$$\frac{\varrho}{0{,}6745}\sqrt{\frac{28}{1612}}, \ \frac{\alpha}{h} = \alpha \cdot \frac{0{,}6745}{\varrho}\sqrt{\frac{1612}{28}} = \alpha\sqrt{2}\sqrt{\frac{1612}{28}} =$$

$10{,}73\,\alpha$, so dass also die Wahrscheinlichkeit, der begangene Fehler liege zwischen $-10{,}73\,\alpha$ und $10{,}73\,\alpha$ gleich ist $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\alpha} e^{-z^2}dz$. Setzt man nach einander $\alpha\,(ah) = 0{,}1,\ 0{,}2, \ldots,$ so findet man, dass von 100,000 Fehlern ihrem absoluten Werthe nach zwischen

0 und $0{,}1 \,.\, 10{,}73 = 1{,}073$ liegen 11246, also von 29: 3, in Wirklichkeit 2,

0 und $0{,}2 \,.\, 10{,}73 = 2{,}146$ liegen 22270, also von 29: 6, in Wirklichkeit 5,

0 und $0{,}3 \,.\, 10{,}73 = 3{,}219$ liegen 32863, also von 29: 9, in Wirklichkeit 9,

0 und $0{,}4 \,.\, 10{,}73 = 4{,}292$ liegen 42839, also von 29: 12, in Wirklichkeit 11,

0 und $0{,}6 \,.\, 10{,}73 = 6{,}438$ liegen 60385, also von 29: 17, in Wirklichkeit 16,

0 und $0{,}8 \,.\, 10{,}73 = 8{,}584$ liegen 74210, also von 29: 22,5, in Wirklichkeit 23,

0 und $1{,}0 \,.\, 10{,}73 = 10{,}73$ liegen 84270, also von 29: 24, in Wirklichkeit 25,

0 und $1{,}5 \,.\, 10{,}73 = 16{,}095$ liegen 96610, also von 29: 28, in Wirklichkeit 29;

auch liegen 13 Werthe von v unter 5,118, 16 darüber. Man sieht, dass die Vertheilung der Fehler der Theorie so ziemlich entspricht, obwohl wir den wahren Werth von h nicht geradezu kennen, und ebenso wenig den wahren Werth von x, also die wahren Beobachtungsfehler auch nicht.

Man könnte sich hierbei die Frage aufwerfen, wie viele Beobachtungen von derselben Genauigkeit, wie die angegebenen, wohl nöthig sein würden, um den wahrscheinlichen Fehler in x auf 0,1 statt 0,950 zu bringen. Sei α die Anzahl derselben, so ist der wahrscheinliche Fehler in x gleich $\varrho\sqrt{2}\sqrt{\frac{[v_0{}^2]}{\alpha-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ $= \varrho\sqrt{2}\sqrt{\frac{[v_0{}^2]}{\alpha(\alpha-1)}}$ (§. 8). Was nun die Grösse $[v_0{}^2]$ anbe-

langt, so kann sie natürlich nur geschätzt werden; jedoch werden wir näherungsweise haben (§. 10)

$$h^2 = \frac{\alpha - 1}{2[v_0^2]}, \quad [v_0^2] = \frac{\alpha - 1}{2h^2}, \text{ d. h. } [v_0^2] = \frac{\alpha - 1}{\frac{28}{1612}} = \frac{1612}{28}(\alpha - 1),$$

also

$$\varrho\sqrt{2}\sqrt{\frac{[v_0^2]}{\alpha(\alpha-1)}} = \varrho\sqrt{2}\sqrt{\frac{1612}{28\,\alpha}} = 0{,}1, \quad \alpha = \frac{1612 \,.\, 2\varrho^2}{0{,}28} = 2619,$$

so dass also etwa 2619 solcher Beobachtungen nöthig wären.

Endlich kann die Berechnung der Grösse $[g v_0^2]$ in diesem und ähnlichen Fällen bedeutend leichter gemacht werden.

Ist nämlich eine Grösse x mehrfach beobachtet worden, und man hat deren (wahrscheinlichsten) Werth mittelst des Satzes (20) in §. 4 gefunden, so dass

$$x = \frac{[gF]}{[g]},$$

so ist

$$v = x - F, \text{ also } [g v_0^2] = [g(x - F)^2] = [g x^2] - 2[gFx] + [gF^2] = x^2[g] - 2x[gF] + [gF^2],$$

also da

$$[g]x = [gF], \quad x^2[g]^2 = [gF]^2$$

$$[g v_0^2] = \frac{[gF]^2}{[g]} - \frac{2[gF]^2}{[g]} + [gF^2] = [gF^2] - \frac{[gF]^2}{[g]}.$$

2) Für das dritte Beispiel des §. 5 werden wir nun für die gegebenen Werthe von α die Werthe von S (d. h. F) nach der gefundenen Formel berechnen und daraus dann die Werthe von v finden. Man erhält so:

	S				S		
Nr.	beobachtet.	berechnet.	v	Nr.	beobachtet.	berechnet.	v
1	10,492	10,463	— 0,029	36	10,260	10,267	+ 0,007
2	487	"	— 024	37	265	255	— 10
3	458	"	+ 05	38	261	"	— 06
4	480	"	— 17	39	257	"	— 02
5	505	"	— 42	40	250	"	+ 05
6	497	"	— 34	41	252	"	+ 03
7	467	"	— 04	42	237	198	— 39
8	464	10,452	— 12	43	211	"	— 13
9	374	350	— 24	44	211	"	— 13
10	345	"	+ 05	45	208	"	— 10
11	351	"	— 01	46	207	"	— 09
12	355	"	— 05	47	204	"	— 06
13	373	"	— 23	48	202	"	— 04
14	332	10,336	+ 04	49	190	"	+ 08
15	306	319	+ 13	50	198	"	00
16	312	313	+ 01	51	202	"	— 04
17	274	"	+ 39	52	203	"	— 05
18	321	"	— 08	53	189	"	+ 09
19	314	309	— 05	54	100	059	— 41
20	309	"	00	55	092	"	— 33
21	296	"	+ 13	56	072	"	— 13
22	282	"	+ 27	57	067	"	— 08
23	297	"	+ 12	58	074	"	— 15
24	316	"	— 07	59	073	"	— 14
25	315	"	— 06	60	055	"	+ 04
26	302	"	+ 07	61	068	042	— 26
27	289	"	+ 20	62	9,944	9,927	— 17
28	289	"	+ 20	63	890	921	+ 31
29	271	"	+ 38	64	888	909	+ 21
30	300	"	+ 09	65	931	"	— 22
31	288	"	+ 21	66	810	782	— 28
32	273	"	+ 36	67	776	"	+ 06
33	291	"	+ 18	68	767	"	+ 15
34	281	"	+ 28	69	765	"	+ 17
35	272	"	+ 37	70	744	"	+ 38

S				S			
Nr.	beobachtet.	berechnet.	v	Nr.	beobachtet.	berechnet.	v
71	9,766	9,782	+ 0,016	84	9,439	9,436	− 0,003
72	768	"	+ 14	85	385	367	− 18
73	746	748	+ 02	86	383	"	− 16
74	663	678	+ 15	87	333	332	− 01
75	662	"	+ 16	88	306	"	+ 26
76	646	"	+ 32	89	317	"	+ 15
77	640	"	+ 38	90	203	182	− 21
78	667	"	+ 11	91	196	"	− 14
79	662	"	+ 16	92	196	177	− 19
80	681	"	− 03	93	237	"	− 60
81	672	"	+ 06	94	153	"	+ 24
82	637	644	+ 07	95	197	"	− 20
83	532	540	+ 08				

Da die sämmtlichen $g = 1$, so erhält man durch Quadrirung der Werthe von v und Addition:

$$[g v_0^2] = 0{,}038053.$$

Ferner ist hier in der Formel (33′) $m = 95$, $n = 2$, $r = 0$, also ist der wahrscheinliche Fehler der Beobachtungsweise gleich $0{,}6744897 \sqrt{\frac{0{,}038053}{93}} = 0{,}0136$; ferner ist die Grösse h in (33′) gleich $\sqrt{\frac{93}{2 \,.\, 0{,}038053}}$, so dass, wenn man in der Tabelle des §. 2 $ah = \alpha$, also $a = \frac{\alpha}{h}$ setzt, man hat

$$a = \frac{\alpha}{h} = \alpha \sqrt{\frac{2 \,.\, 0{,}038053}{93}} = 0{,}0286 \,.\, \alpha,$$

so dass wenn man α nach einander setzt 0,1, 0,3 . . ., man wird sagen können, dass von 100000 Fehlern liegen zwischen

0 und 0,1 . 0,0286 = 0,00286 ihrer 11246, also von 95: 10,5,
in Wirklichkeit 7,

0 und 0,3 . 0,0286 = 0,00858 ihrer 32863, also von 95: 31,
in Wirklichkeit 35,

0 und 0,5 . 0,0286 = 0,01430 ihrer 52050, also von 95: 49,4,
in Wirklichkeit 50,
0 und 0,7 . 0,0286 = 0,02002 ihrer 67780, also von 95: 64,5,
in Wirklichkeit 67,
0 und 1,0 . 0,0286 = 0,02860 ihrer 84270, also von 95: 80,
in Wirklichkeit 80,
0 und 1,5 . 0,0286 = 0,04290 ihrer 96610, also von 95: 91,7
in Wirklichkeit 94,
0 und 2,0 . 0,0286 = 0,05720 ihrer 99532, also von 95: 94,5,
in Wirklichkeit 94.

Ferner liegen unter 0,0136 ihrer 47, über 0,0136 aber 48 Fehler, so dass wirklich die Beobachtungen mit der Theorie so ziemlich übereinstimmen.

Was die wahrscheinlichen Fehler der beiden Grössen x und y anbelangt, so ist (§. 8)

$$\text{der von } 8{,}81297 \text{ gleich } \frac{0{,}0136}{\sqrt{8{,}3}} = 0{,}004725,$$

$$\text{der von } 0{,}0057695 \text{ gleich } \frac{0{,}0136}{\sqrt{401746}} = 0{,}00002145.$$

3) Wollte man ebenso für das vierte Beispiel des §. 5 verfahren, so wären die dortigen Grössen (1), . . ., (12) geradezu unsere v, so dass also

$$[gv_0^2] = 40\,(1)^2 + 20\,(2)^2 + \cdots + 50\,(12)^2;$$

dann wäre in der Formel (33′) jetzt $m = 12$, $n = 12$, $r = 5$, da man nur 12 Beobachtungen für 12 Grössen hat, für die 5 Bedingungsgleichungen bestehen. Demnach wäre der wahrscheinliche Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1 gleich $0{,}6744897 \sqrt{\frac{[gv_0^2]}{5}}$. Die wahrscheinlichen Fehler der gemachten Beobachtungen, deren Gewichte 40, 20, . . ., 50, sowie der Endresultate, deren Gewichte nach §. 9 bestimmt werden, finden sich dann in bekannter Weise.

4) Man kann vermittelst des Vorstehenden auch die Aufgabe leicht lösen, zwei Instrumente, die zu denselben Messungen verwendet werden können, in Bezug auf ihre verhältnissmässige Güte und Brauchbarkeit zu prüfen. Wir wollen annehmen, man

habe zwei Theodoliten, die man in dieser Beziehung untersuchen soll. Man messe nun mit dem einen derselben einen bestimmten Winkel sehr viele Male, berechne nach §. 4 den wahrscheinlichsten Werth desselben und dann nach §. 10 den wahrscheinlichen Fehler der Beobachtung vom Gewichte 1, d. h. der einfachen Beobachtung, wenn man alle gemachten Beobachtungen als gleich genau ansehen kann und jeder das Gewicht 1 beilegt. Ganz ebenso verfahre man mit dem anderen Theodoliten, wobei man keineswegs denselben Winkel wie vorhin zu messen hat. Sind nun r, r' die gefundenen wahrscheinlichen Fehler, so verhalten sich die beiden, mittelst der zwei Theodoliten durchgeführten Beobachtungsmethoden wie $\frac{1}{r^2}:\frac{1}{r'^2}$, in welchem Verhältnisse nämlich die Gewichte stehen, die man den Beobachtungen, die mit diesen zwei Instrumenten gemacht sind, beilegen muss, wenn man sie mit einander verbinden will. Kennt man dies nun einmal, so wird man, wenn man denselben Winkel mit beiderlei Instrumenten gemessen hat, der einfachen Beobachtung mittelst des ersten Instrumentes das Gewicht 1, der aber mittelst des zweiten das Gewicht $\left(\frac{r}{r'}\right)^2$ beilegen.

§. 12.

Gewicht des durch (33') bestimmten Werthes von h, also wahrscheinlicher Fehler dieser Grösse, vorausgesetzt m sei gross.

Wir haben in §. 10 gesehen, dass die Wahrscheinlichkeit, ein beliebig angenommener Werth von h sei gerade der rechte Werth dieser Grösse, ist

$$\frac{h^m e^{-h^2\tau^2}}{\Sigma h^m e^{-h^2\tau^2}},$$

wo wir zur Abkürzung die Grösse $[gv^2]$ mit τ^2 bezeichnet haben (wo näherungsweise $\tau^2=\frac{m}{m-n+r}[gv_0{}^2]$ nach §. 10). Als wahrscheinlichsten Werth von h haben wir daraus gezogen $\sqrt{\frac{m}{2\tau^2}}$,

so dass wenn wir diesen Werth mit h_0 bezeichnen und $h = h_0 + z$ setzen, man sagen kann, die Wahrscheinlichkeit $h_0 + z$ sei der wahre Werth von h, d. h. man begehe einen Fehler z, wenn man h_0 als wahren Werth von h annimmt, ist

$$\frac{(h_0 + z)^m e^{-\tau^2(h_0+z)^2}}{\Sigma(h_0+z)^m e^{-\tau^2(h_0+z)^2}},$$

wo nun das Σ sich auf alle Werthe von z bezieht. Man sieht leicht, dass, weil h nur positive Werthe annehmen kann, z nur von $-h_0$ bis $+\infty$ sich erstrecken kann, so dass die eben genannte Grösse auch gleich

$$\frac{\varepsilon(h_0 + z)^m e^{-\tau^2(h_0+z)^2}}{\int\limits_{-h_0}^{+\infty}(h_0 + z)^m e^{-\tau^2(h_0+z)^2}\,dz} \qquad (a)$$

ist, und also die Wahrscheinlichkeit ausdrückt, man begehe einen Fehler z, wenn man den Werth h_0 als wahren Werth von h nimmt $\left(\text{wo } h_0 = \sqrt{\frac{m-n+r}{2[gv_0{}^2]}}\right)$. Was das bestimmte Integral im Nenner anbelangt, so sei $h_0 + z = u$, und es ist dann dasselbe =

$$\int\limits_0^\infty u^m e^{-\tau^2 u^2}\,du.$$

Die hier vorkommende Grösse τ^2 ist natürlich eine Constante. Setzt man noch $\tau u = x$, so ist dies Integral =

$$\frac{1}{\tau^{m+1}}\int\limits_0^\infty x^m e^{-x^2}\,dx, \quad \tau = \sqrt{\frac{m}{m-n+r}[gv_0{}^2]} = \sqrt{\frac{m}{2h_0{}^2}}$$

$$= \frac{1}{h_0}\sqrt{\frac{m}{2}}, \ \frac{1}{\tau} = h_0\sqrt{\frac{2}{m}}.$$

Was nun den Werth dieses Integrals anbelangt, so ist

für $m = 2i$, d. h. gerade: $\int\limits_0^\infty x^{2i} e^{-x^2}dx = \frac{1.3.5\ldots(2i-1)}{2^i}\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,

für $m = 2i + 1$, d. h. ungerade: $\int\limits_0^\infty x^{2i+1} e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}.1.2.3\ldots i.$

Daraus folgt nun für die Grösse (a):

für $m = 2i$, d. h. wenn m eine gerade Zahl:

$$\frac{\varepsilon\, 2^{i+1} \tau^{2i+1} (h_0 + z)^{2i} e^{-\tau^2 (h_0+z)^2}}{1.3.5\ldots(2i-1)\sqrt{\pi}},$$

für $m = 2i + 1$, d. h. wenn m eine ungerade Zahl:

$$\frac{\varepsilon . 2 . \tau^{2i+2} (h_0 + z)^{2i+1} e^{-\tau^2 (h_0+z)^2}}{1.2.3\ldots i}.$$

Setzt man hier $\tau = \frac{1}{h_0}\sqrt{\frac{m}{2}}$, so ist diese Grösse für

$$m = 2i: \quad \frac{\varepsilon \,.\, 2^{i+1} i^{\frac{2i+1}{2}} \left(\frac{h_0+z}{h_0}\right)^{2i} e^{-i\left(\frac{h_0+z}{h_0}\right)^2}}{h_0 . 1.3.5\ldots(2i-1)\sqrt{\pi}},$$

$$m = 2i + 1: \quad \frac{\varepsilon . 2 . \left(\frac{2i+1}{2}\right)^{i+1} \left(\frac{h_0+z}{h_0}\right)^{2i+1} e^{-\frac{2i+1}{2}\left(\frac{h_0+z}{h_0}\right)^2}}{h_0 . 1.2.3\ldots i},$$

Daraus folgt weiter, es sei die Wahrscheinlichkeit, dass z den Werth 0 habe, also h_0 der rechte Werth von h sei:

$$\frac{\varepsilon \,.\, 2^{i+1} i^{\frac{2i+1}{2}} e^{-i}}{1.3\ldots(2i-1)\, h_0 \sqrt{\pi}} \text{ oder } \frac{\varepsilon \,.\, 2 \,.\, \left(\frac{2i+1}{2}\right)^{i+1} e^{-\frac{2i+1}{2}}}{1.2\ldots i . h_0}.$$

Nennt man diese Grösse k, so ist also die (a):

$$k\left(1 + \frac{z}{h_0}\right)^{2i} e^{-i\left[\left(\frac{h_0+z}{h_0}\right)^2 - 1\right]} \text{ oder } k\left(1 + \frac{z}{h_0}\right)^{2i+1} e^{-\frac{2i+1}{2}\left[\left(\frac{h_0+z}{h_0}\right)^2 - 1\right]}.$$

Offenbar ist der wahre Werth von z klein, selbst klein im Verhältniss zu h_0, da ja letztere Grösse der wahrscheinlichste Werth ist. Dies ist übrigens um so wahrer, je grösser m ist, und auch nur unter dieser Voraussetzung werden wir auf die Bestimmung von h_0 einigen Werth legen.

Gesetzt also, m, d. h. i, sei sehr gross, so ist bekanntlich nahezu

$$1 . 3 . 5 \ldots (2i - 1) = \sqrt{2} . (2i)^i e^{-i},$$

$$1 . 2 \ldots i = \sqrt{2 i \pi}\, i^i e^{-i},$$

also

$$\frac{2^{i+1} i^{\frac{2i+1}{2}} e^{-i}}{1.3\ldots(2i-1)\sqrt{\pi}} \text{ nahezu } = \frac{e^{-i}.2^{i+1}.i^{\frac{2i+1}{2}}}{\sqrt{2}.\sqrt{\pi}.(2i)^i e^{-}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}.(2i)^{\frac{2i+1}{2}}}{\sqrt{2\pi}(2i)^i} = \frac{\sqrt{2i}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}},$$

$$\frac{2\left(\frac{2i+1}{2}\right)^{i+1} e^{-\frac{2i+1}{2}}}{1.2\ldots i} \text{ nahezu } = \frac{2\left(\frac{2i+1}{2}\right)^{i+1} e^{-\frac{2i+1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, i^{i+\frac{1}{2}} e^{-i}}$$

$$= \frac{2e^{-\frac{1}{2}}.\left(\frac{2i+1}{2}\right)^{i+\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2i+1}{2}}}{\sqrt{2\pi}\, i^{i+\frac{1}{2}}} = \frac{e^{-\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{2i}\right)^{i+\frac{1}{2}}\sqrt{2i+1}}{\sqrt{\pi}}.$$

Für ein grosses i ist aber nahezu

$$\left(1+\frac{1}{2i}\right)^{i+\frac{1}{2}} = \left(1+\frac{1}{2i}\right)^{i}.\left(1+\frac{1}{2i}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(1+\frac{1}{2i}\right)^{2i}}.\left(1+\frac{1}{2i}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{e},$$

so dass also auch obige Grösse $= \frac{\sqrt{2i+1}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{\pi}}$ ist. Also ist immer $k = \frac{\sqrt{m}}{h_0\sqrt{\pi}}\,\varepsilon$.

Ferner ist

$$\left(1+\frac{z}{h_0}\right)^{2i} e^{-i\left\{\left(1+\frac{z}{h_0}\right)^2-1\right\}} = e^{2il\left(1+\frac{z}{h_0}\right)-i\left\{\left(1+\frac{z}{h_0}\right)^2-1\right\}}$$
$$= e^{2i\left(\frac{z}{h_0}-\frac{1}{2}\frac{z^2}{h_0^2}+\ldots\right)-2i\frac{z}{h_0}-i\frac{z^2}{h_0^2}},$$

also wenn man die höheren Potenzen von $\frac{z}{h_0}$ als die zweite vernachlässigt, so ist diese Grösse gleich

$$e^{-2i\frac{z^2}{h_0^2}} = e^{-\frac{mz^2}{h_0^2}}.$$

Ebenso

$$\left(1+\frac{z}{h_0}\right)^{2i+1} e^{-\frac{2i+1}{2}\left\{\left(1+\frac{z}{h_0}\right)^2-1\right\}} = e^{(2i+1)l\left(1+\frac{z}{h_0}\right)-\frac{2i+1}{2}\left\{\left(1+\frac{z}{h_0}\right)^2-1\right\}}$$
$$= e^{(2i+1)\frac{z^2}{h_0^2}} = e^{-\frac{mz^2}{h_0^2}}.$$

Daraus folgt endlich, dass für ein bedeutend grosses m die Grösse (a) ist

$$\varepsilon \frac{\sqrt{m}}{h_0 \sqrt{\pi}} e^{-\frac{m z^2}{h_0^2}}.$$

Vergleicht man dies mit der Formel (3′) in §. 2, so folgt hieraus für das Maass der Genauigkeit der Bestimmung von $h_0 : \frac{\sqrt{m}}{h_0}$, und also ist der wahrscheinliche Fehler von $h_0 : \frac{\varrho h_0}{\sqrt{m}}$. Man kann also bei ziemlich grossem m eins gegen eins wetten, es liege der wahre Werth von h zwischen

$$h_0 + \frac{\varrho h_0}{\sqrt{m}} = h_0\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right) \text{ und } h_0 - \frac{\varrho h_0}{\sqrt{m}} = h_0\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right),$$

also der wahre Werth des wahrscheinlichen Fehlers der Beobachtung vom Gewichte 1 zwischen

$$\frac{\varrho}{h_0\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right)} = \frac{r_0}{1 + \frac{\varrho}{\sqrt{m}}} = r_0\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right)$$

und

$$\frac{\varrho}{h_0\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right)} = \frac{r_0}{1 - \frac{\varrho}{\sqrt{m}}} = r_0\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{m}}\right),$$

wenn $r_0 = \frac{\varrho}{h_0}$, und man beachtet, dass nahezu $\frac{1}{1 \pm \frac{\varrho}{\sqrt{m}}} = 1 \mp \frac{\varrho}{\sqrt{m}}$, indem $\frac{\varrho}{\sqrt{m}}$ sehr klein.

So ist in dem Beispiele 1 des §. 11: $\frac{\varrho}{\sqrt{29}} = 0{,}08846$, so dass also der wahrscheinliche Fehler der einfachen Beobachtung zwischen $5{,}118\,(1 \pm 0{,}08846)$, d. h. zwischen 4,665 und 5,571 schwankt.

In dem zweiten Beispiele des §. 11 kann man eins gegen eins wetten, der wahrscheinliche Fehler der einfachen Beobachtung liege zwischen

$$0{,}0136\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{95}}\right) = 0{,}0130 \text{ und } 0{,}0136\left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{95}}\right) = 0{,}0143.$$

Dass hiernach auch die wahrscheinlichen Fehler der gefundenen Resultate innerhalb ihrer wahrscheinlichen Gränzen gegeben sind, versteht sich von selbst.

Wir haben damit die für die Anwendung nothwendigen Lehren der Methode auseinandergesetzt, und wollen sie nunmehr noch zur Uebung auf eine Reihe einzelner Fragen anwenden, nachdem wir nur noch eine Bemerkung in Bezug auf die Prüfung von Hypothesen mittelst derselben gemacht haben.

§. 13.

Prüfung gemachter Hypothesen.

In einer Menge von Aufgaben der Physik und Technik kennt man die Form der in §. 3 mit F bezeichneten Function der Unbekannten nicht, sondern wählt dieselbe erst. So setzt man häufig

$$F = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \cdots, \qquad (a)$$

wo man, da für eine Reihe von Werthen von x die zugehörigen Werthe von F bekannt sind, nun die Werthe von $A, B, C, D, \ldots$ bestimmen will. Was nun diesen Ausdruck (a) anbelangt, so ist er natürlich desto einfacher, je weniger Glieder man in demselben beibehält. Wir wollen annehmen, man behalte die drei ersten, setze also:

$$F = A + Bx + Cx^2, \qquad (b)$$

und kenne nun für $x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ die Werthe $F_1, \ldots, F_m$ von F mit den Gewichten $g_1, \ldots, g_m$, so dass

$$\left.\begin{array}{l} F_1 = A + B\alpha_1 + C\alpha_1^2 \text{ (Gew. } g_1), \\ F_2 = A + B\alpha_2 + C\alpha_2^2 \text{ („ } g_2), \\ \quad\vdots \\ F_m = A + B\alpha_m + C\alpha_m^2 \text{ (Gew. } g_m), \end{array}\right\} \qquad (c)$$

so wird man, wenn man dies mit §. 3 vergleicht, haben:

$$\begin{array}{llll} a_1 = 1, & b_1 = \alpha_1, & c_1 = \alpha_1^2, & \\ a_2 = 1, & b_2 = \alpha_2, & c_2 = \alpha_2^2, & x = A, \; y = B, \; z = C, \\ \quad\vdots & & & \\ a_m = 1, & b_m = \alpha_m, & c_m = \alpha_m^2, & \end{array}$$

und hieraus die wahrscheinlichsten Werthe von A, B, C nach §. 3 [Gleichung (11)] ziehen. Sind diese bestimmt, so ermittle man nach §. 10 den wahrscheinlichen Fehler der Beobachtung vom Gewichte 1, wodurch auch die wahrscheinlichen Fehler der Beobachtungen von den Gewichten $g_1, \ldots, g_m$ bekannt sind. Fallen nun diese wahrscheinlichen Fehler so aus, dass der Beobachter sie für seine ihm durch lange Uebung bekannte Beobachtungsweise für zulässig hält, so wird man sich mit (b), d. h. mit den drei ersten Gliedern von (a) begnügen können; fällt dagegen der wahrscheinliche Fehler zu gross aus, so ist dies sicher ein Zeichen, dass man mit (b) sich nicht begnügen kann, sondern entweder mehr Glieder von (a) nehmen muss, oder gar der Grösse F eine ganz andere Form zu geben hat.

Sind, wie fast immer, alle gemachten Beobachtungen vom gleichen Gewichte, so kann man, wie in §. 11 geschehen, nachsehen, ob die wirkliche Vertheilung der Beobachtungsfehler der theoretischen (§. 2) entspricht. Ist dies der Fall, so hat man einen weiteren Prüfstein für die Zulässigkeit der angenommenen Form; ist es nicht der Fall, so wird man für F eben weitere Glieder zu nehmen haben.

Selbst in dem Falle, da die Form der Grösse F in (a) zum Voraus bekannt ist, wird man dieses letzte Prüfungsmittel anwenden, da, falls es zutrifft, dadurch bestätigt ist, dass die Voraussetzungen, die wir in §. 1 in Bezug auf die zufälligen Beobachtungsfehler machten, erfüllt sind, also namentlich nicht etwa constante Beobachtungsfehler, deren Quelle mithin entdeckbar ist, vorkommen.

Theorie des Repetitionsverfahrens bei Winkelmessungen.

§. 14.

I. Einfache Winkelbestimmung. Wahrscheinlicher Fehler derselben.

Angenommen, es sei für die Ablesung eines Winkels am Theodoliten der wahrscheinliche Fehler $= \beta$, für die Einstellung des Instruments auf den Visirgegenstand aber α (beide etwa in Secunden gegeben); sei ferner 1 das Gewicht einer Beobachtung, deren wahrscheinlicher Fehler $= 1$ ist, so sind die Gewichte für die Ablesung und Einstellung gleich $\frac{1}{\beta^2}$ und $\frac{1}{\alpha^2}$ (§. 3). Gesetzt nun, man wolle einen Winkel ACB messen, so sind dazu, wenn man bloss einfach misst, folgende Operationen nothwendig:

1) Die Alhidade wird festgestellt; der Index derselben entspricht alsdann einem Punkte u der Theilung, den wir durch Ablesung $= m$ finden, mit dem Gewichte $\frac{1}{\beta^2}$.

2) Ohne u zu ändern, wird das Instrument auf A eingestellt; die Entfernung der Richtung nach A vom Anfangspunkt der Theilung, v, ist dann gleich u, mit dem Gewichte $\frac{1}{\alpha^2}$.

3) Ohne v zu ändern, wird die Alhidade gedreht und das Instrument auf B eingestellt, wodurch der Index der Alhidade auf einen anderen Punkt w der Theilung kommt, dessen Entfer-

nung vom Anfangspunkt $= v + x$ ist, wo $x = ACB$, mit dem Gewichte $\frac{1}{\alpha^2}$.

4) Die Angabe des Index, w, wird abgelesen und gleich m' gefunden, mit dem Gewichte $\frac{1}{\beta^2}$.

Also hat man folgende Gleichungen:

$$u = m \left(\text{Gew. } \frac{1}{\beta^2}\right), \quad v = u \left(\text{Gew. } \frac{1}{\alpha^2}\right), \; w = v + x \left(\text{Gew. } \frac{1}{\alpha^2}\right),$$
$$w = m' \left(\text{Gew. } \frac{1}{\beta^2}\right).$$

Vergleicht man dies mit (6) in §. 3, und ordnet die vier Unbekannten so: x, u, v, w, so ist:

$$\begin{array}{llllll}
a_1 = 0, & b_1 = 1, & c_1 = 0, & d_1 = 0, & F_1 = m, & g_1 = \frac{1}{\beta^2}, \\
a_2 = 0, & b_2 = -1, & c_2 = 1, & d_2 = 0, & F_2 = 0, & g_2 = \frac{1}{\alpha^2}, \\
a_3 = -1, & b_3 = 0, & c_3 = -1, & d_3 = 1, & F_3 = 0, & g_3 = \frac{1}{\alpha^2}, \\
a_4 = 0, & b_4 = 0, & c_4 = 0, & d_4 = 1, & F_4 = m', & g_4 = \frac{1}{\beta^2}.
\end{array}$$

$[ga^2] = \frac{1}{\alpha^2}$, $[gab] = 0$, $[gac] = \frac{1}{\alpha^2}$, $[gad] = -\frac{1}{\alpha^2}$, $[gb^2] = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$, $[gbc] = -\frac{1}{\alpha^2}$, $[gbd] = 0$, $[gc^2] = \frac{2}{\alpha^2}$, $[gcd] = -\frac{1}{\alpha^2}$, $[gd^2] = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$, $[gaF] = 0$, $[gbF] = \frac{m}{\beta^2}$, $[gcF] = 0$, $[gdF] = \frac{m'}{\beta^2}$, also wenn zuerst $[gaF] = k$, (wo $k = 0$):

$$\frac{x}{\alpha^2} + \frac{v}{\alpha^2} - \frac{w}{\alpha^2} = k, \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)u - \frac{1}{\alpha^2}v = \frac{m}{\beta^2}, \frac{x}{\alpha^2} - \frac{u}{\alpha^2} + \frac{2v}{\alpha^2} - \frac{w}{\alpha^2}$$
$$= 0, \; -\frac{x}{\alpha^2} - \frac{v}{\alpha^2} + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}\right)w = \frac{m'}{\beta^2},$$

woraus:

$$w = k\beta^2 + m', \quad u = m - k\beta^2, \quad v = m - (\alpha^2 + \beta^2)k,$$
$$x = 2(\alpha^2 + \beta^2)k + m' - m,$$

worin eigentlich $k = 0$, also $x = m' - m$ ist. Nach §. 7 (For-

meln 23) ist aber das Gewicht von $x = \frac{1}{2(\alpha^2 + \beta^2)}$, also der wahrscheinliche Fehler von x gleich $\sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2)}$, wie natürlich, da vier Operationen, von den wahrscheinlichen Fehlern β, α, α, β nöthig waren (§. 6. III).

II. Repetitionsbeobachtungen.

Gehen wir nun zu Repetitionsbeobachtungen über. Das erste Geschäft bei solchen Beobachtungen ist genau dasselbe, wie so eben beschrieben; sodann schliesst man die Alhidade an den Limbus und führt beide vereinigt auf A zurück, auf welchen Punkt man das Instrument einstellt. Der Limbus wird sodann festgestellt, die Alhidade gelöst und auf B eingestellt. Von jetzt an wiederholt sich das Verfahren so oft man will.

Es ist klar, dass das w, auf das man bei der ersten Operation gekommen ist, die Stelle des u der zweiten Operation vertritt. Läse man nach jeder Einstellung ab, so hätte man, wenn man n Operationen macht, zur Abkürzung $\frac{1}{\alpha^2} = a$, $\frac{1}{\beta^2} = b$ setzt, folgende Gleichungen, deren Gewichte jeweils senkrecht darüber stehen:

$$\left.\begin{array}{llll}
b & a & a & b \\
u = m, & v = u, & v + x = w, & w = m_1, \\
 & v_1 = w, & v_1 + x = w_1, & w_1 = m_2, \\
 & v_2 = w_1, & v_2 + x = w_2, & w_2 = m_3, \\
 & \vdots & & \\
 & v_{n-1} = w_{n-2}, & v_{n-1} + x = w_{n-1}, & w_{n-1} = m_n,
\end{array}\right\} (A)$$

wo $m, m_1, \ldots, m_n$ die auf einander folgenden Ablesungen sind, und x der zu messende Winkel ist. Man hat alsdann die Unbekannten: $u, v, v_1, \ldots, v_{n-1}, w, w_1, \ldots, w_{n-1}, x$, der Anzahl nach $2n + 2$, während man in (A) $3n + 1$ Gleichungen hat.

Würde man bloss zu Anfang und Ende ablesen, so fallen in der letzten Verticalreihe von (A) alle Gleichungen bis auf die letzte weg, und man hat also $2n + 2$ Gleichungen.

In der Regel wird weder der eine noch der andere dieser Fälle eintreten, und wir wollen deshalb annehmen, man lese ab

nach der $c$ten, $d$ten, $e$ten, ..., $n$ten Operation, und habe dort $m_c, m_d, m_e, \ldots, m_n$, so werden die (A) nun die folgenden sein:

$$\left.\begin{array}{llll}
b & a & a & b \\
u = m, & v = u, & v + x = w, & \\
 & v_1 = w, & v_1 + x = w_1, & \\
 & \vdots & \vdots & \\
 & v_{c-1} = w_{c-2}, & v_{c-1} + x = w_{c-1} & w_{c-1} = m_c, \\
 & v_c = w_{c-1}, & v_c + x = w_c, & \\
 & \vdots & & \\
 & v_{d-1} = w_{d-2}, & v_{d-1} + x = w_{d-1}, & w_{d-1} = m_d, \\
 & & \vdots & \\
 & v_{n-1} = w_{n-2}, & v_{n-1} + x = w_{n-1}, & w_{n-1} = m_n.
\end{array}\right\} (A')$$

Nach den Grundsätzen des §. 3 muss nun die Summe

$$\begin{array}{l}
b(u - m)^2 + a(v - u)^2 + a(v + x - w)^2 \\
\qquad + a(v_1 - w)^2 + a(v_1 + x - w_1)^2 \\
\qquad \vdots \\
\qquad + a(v_{c-1} - w_{c-2})^2 + a(v_{c-1} + x - w_{c-1})^2 \\
\qquad \qquad + b(w_{c-1} - m_c)^2 \\
\qquad \qquad \vdots \\
\qquad + a(v_{n-1} - w_{n-2})^2 + a(v_{n-1} + x - w_{n-1})^2 \\
\qquad \qquad + b(w_{n-1} - m_n)^2
\end{array}$$

ein Minimum sein.

Die Unbekannten sind: $x, u, v, v_1, \ldots, w_{n-1}, w, w_1, \ldots, w_{n-1}$, so dass man nach denselben zu differenziren hat. Da uns vor Allem der Werth von x und dessen Gewicht interessirt, so wollen wir zuerst nach x differenziren, wodurch die erste der Gleichungen (11) des §. 2 zum Vorschein kommt. Diese ist hier

$$a\{v + x - w + v_1 + x - w_1 + \cdots + v_{n-1} + x - w_{n-1}\} = 0,$$

so dass die Grösse $[gaF]$ der (11) in §. 3 Null ist. Wegen §. 7 wollen wir aber etwa k schreiben, da wir [vergleiche (23) in §. 7] den Coëfficienten dieser Grösse k im Werthe von x brauchen. Man hat also

$$anx + a(v + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}) - a(w + w_1 + \cdots + w_{n-1}) = k. \quad (B)$$

Die Differentiation nach $v, v_1, \ldots, v_{n-1}$ giebt:

$$\left.\begin{aligned} 2v + x - (u + w) &= 0, \\ 2v_1 + x - (w + w_1) &= 0, \\ &\vdots \\ 2v_{n-1} + x - (w_{n-2} + w_{n-1}) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (B')$$

während die nach $u, w, w_1, \ldots, w_{n-1}$ giebt:

$$\left.\begin{aligned} (a + b)u - av - bm &= 0, \\ 2w - (v + v_1) - x &= 0, \\ 2w_1 - (v_1 + v_2) - x &= 0, \\ &\vdots \\ 2w_{c-2} - (v_{c-2} + v_{c-1}) - x &= 0, \\ (2a + b) w_{c-1} - a(v_{c-1} + v_c) - ax - bm_c &= 0, \\ 2w_c - (v_c + v_{c+1}) - x &= 0, \\ &\vdots \\ (2a + b) w_{d-1} - a(v_{d-1} + v_d) - ax - bm_d &= 0, \\ 2w_d - (v_d + v_{d+1}) - x &= 0, \\ &\vdots \\ (a + b) w_{n-1} - av_{n-1} - ax - bm_n &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (B'')$$

aus welchen drei Gleichungssystemen nun die Unbekannten zu ermitteln sind. Aus den (B') folgt zunächst:

$$v = \frac{u + w - x}{2}, \quad v_1 = \frac{w + w_1 - x}{2}, \ldots, \quad v_{n-1} = \frac{w_{n-2} + w_{n-1} - x}{2}, \quad (C)$$

und wenn man diese Werthe in (B'') einsetzt, so erhält man für die erste, $(c+1)$te, $(d+1)$te, ..., $(n+1)$te, indem man zur Abkürzung $\frac{b}{a} = \gamma$ setzt:

$$\left.\begin{aligned} (1 + 2\gamma)u - w &= 2\gamma m - x, \\ - w_{c-2} + (2 + 2\gamma) w_{c-1} - w_c &= 2\gamma m_c, \\ - w_{d-2} + (2 + 2\gamma) w_{d-1} - w_d &= 2\gamma m_d, \\ - w_{e-2} + (2 + 2\gamma) w_{e-1} - w_e &= 2\gamma m_e, \\ &\vdots \\ - w_{n-2} + (1 + 2\gamma) w_{n-1} &= 2\gamma m_n + x, \end{aligned}\right\} \quad (C')$$

während jede der anderen die Form

$$w_{r-1} - w_{r-2} = w_r - w_{r-1}, \quad (w_1 - w = w - u), \qquad (C'')$$

hat. Aus den Gleichungen (C'') folgt, dass die Grössen:

$$u, w, w_1, \ldots, w_{c-1};\; w_{c-1}, w_c, \ldots, w_{d-1};\; w_{d-1}, w_d, \ldots, w_{e-1}; \ldots$$

für sich arithmetische Reihen bilden, so dass:

$$\begin{aligned}
w - u &= w_1 - w = w_2 - w_1 = \ldots \\
&= w_{c-1} - w_{c-2} = \frac{w_{c-1} - u}{c}, \\
w_c - w_{c-1} &= w_{c+1} - w_c = w_{c+2} - w_{c+1} = \ldots \\
&= w_{d-1} - w_{d-2} = \frac{w_{d-1} - w_{c-1}}{d - c}, \\
w_d - w_{d-1} &= w_{d+1} - w_d = w_{d+2} - w_{d+1} = \ldots \\
&= w_{e-1} - w_{e-2} = \frac{w_{e-1} - w_{d-1}}{e - d}. \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Setzt man dies in (C'), so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(2\gamma + \frac{1}{c}\right)u - \frac{1}{c}\, w_{c-1} = 2\gamma m - x, \\
&-\frac{1}{c}\, u + \left(2\gamma + \frac{1}{c} + \frac{1}{d-c}\right)w_{c-1} - \frac{1}{d-c}\, w_{d-1} = 2\gamma m_c, \\
&-\frac{1}{d-c} w_{c-1} + \left(2\gamma + \frac{1}{d-c} + \frac{1}{e-d}\right) w_{d-1} - \frac{1}{e-d} w_{e-1} = 2\gamma m_d, \\
&\qquad\vdots \\
&-\frac{1}{n-s}\, w_{s-1} + \left(2\gamma + \frac{1}{n-s}\right) w_{n-1} = 2\gamma m_n + x,
\end{aligned}\right\} (D)$$

wo die $s$te die vor der $n$ten hergehende Ablesung bedeutet.

Hieraus nun bestimmt man x in folgender Weise. Man dividire die erste Gleichung (D) durch $\left(2\gamma + \frac{1}{c}\right)c$ und addire sie dann zur zweiten, so fällt u weg; dividirt man nun diese neue Gleichung mit dem mit $(d - c)$ multiplicirten Coëfficienten von w_{c-1} und addirt sie dann zur dritten, so verschwindet $w_{c-1}, \ldots,$ so dass endlich erhalten wird:

$$L w_{n-1} = M + N x,$$

wo L, M, N bekannte Grössen sind. Wendet man dasselbe

Verfahren an, indem man mit der letzten Gleichung (D) anfängt und nach einander w_{n-1}, w_{s-1}, ..., w_{c-1} wegschafft, so erhält man

$$L'u = M' + N'x,$$

wo L', M', N' abermals bekannt sind. Zieht man hieraus u, w_{n-1}, und beachtet, dass

$$v + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1} = \frac{u + 2(w + w_1 + \cdots + w_{n-2}) + w_{n-1} - nx}{2},$$

$$v + v_1 + \cdots + v_{n-1} - (w + w_1 + \cdots + w_{n-1}) = \frac{u}{2} - \frac{w_{n-1}}{2} - \frac{nx}{2},$$

also die (B):

$$nx + \frac{u}{2} - \frac{w_{n-1}}{2} - \frac{nx}{2} = \frac{k}{a}, \quad nx + u - w_{n-1} = \frac{2k}{a},$$

so hat man

$$nx + \frac{M' + N'x}{L'} - \frac{M + Nx}{L} = \frac{2k}{a},$$

$$x = \frac{\frac{2k}{a}LL' - M'L + ML'}{LL'n + N'L - NL'},$$

woraus, da k eigentlich 0, als wahrscheinlichster Werth von x folgt:

$$x = \frac{ML' - M'L}{nLL' + N'L - NL'}$$

mit dem Gewichte

$$\frac{nLL' + N'L - NL'}{2LL'} a, \text{ (§. 7)},$$

so dass der wahrscheinliche Fehler von x ist wegen $a = \frac{1}{\alpha^2}$:

$$\alpha \sqrt{\frac{2LL'}{nLL' + N'L - NL'}}.$$

III. Besonderer Fall, da c, d, ... n eine arithmetische Reihe bilden.

In der Regel geschehen die Ablesungen so, dass man etwa von 5 zu 5, oder 10 zu 10 u. s. w. Operationen wieder abliest. In diesem Falle, den wir besonders betrachten wollen, bilden c, d, e, ... eine arithmetische Reihe und es ist $d = 2c$, $e =$

$3c, \ldots, s = (p-1)c$, $n = pc$; multiplicirt man nun die (D) mit c und setzt $c\gamma + 1 = k$, so ist

$$\left.\begin{aligned}
&(2k-1)u - w_{c-1} = (k-1)m - cx,\\
&\quad -u \quad + 2kw_{c-1} - w_{2c-1} \quad = 2(k-1)m_c,\\
&\quad -w_{c-1} + 2kw_{2c-1} - w_{3c-1} \quad = 2(k-1)m_{2c},\\
&\qquad\qquad\vdots\\
&\quad -w_{(p-1)c-1} + (2k-1)w_{pc-1} = 2(k-1)m_{pc} + cx.
\end{aligned}\right\}\quad (D')$$

Verfährt man mit diesen Gleichungen, wie oben für die (D) vorgeschrieben, und setzt nach einander:

$$\left.\begin{array}{llll}
2k - \dfrac{1}{2k-1} = k_1, & \dfrac{m}{2k-1} + m_c & = M_1, \\
2k - \dfrac{1}{k_1} = k_2, & \dfrac{M_1}{k_1} + m_{2c} & = M_2, \\
2k - \dfrac{1}{k_2} = k_3, & \dfrac{M_2}{k_2} + m_{3c} & = M_3, \\
\quad\vdots & \quad\vdots & \\
2k - \dfrac{1}{k_{p-2}} = k_{p-1}, & & \\
 & \quad\vdots & \\
2k - 1 - \dfrac{1}{k_{p-1}} = k\,, & \dfrac{M_{p-1}}{k_{p-1}} + m_n & = M_p,
\end{array}\right\}\quad (E).$$

so zieht man aus (D') in der angegebenen Weise:

$$\begin{aligned}
&u - \frac{1}{2k-1}w_{c-1} = \frac{2(k-1)m}{2k-1} - \frac{cx}{2k-1},\\
&k_1 w_{c-1} - w_{2c-1} = 2(k-1)M_1 - \frac{cx}{2k-1},\\
&k_2 w_{2c-1} - w_{3c-1} = 2(k-1)M_2 - \frac{cx}{(2k-1)k_1},\\
&k_3 w_{3c-1} - w_{4c-1} = 2(k-1)M_3 - \frac{cx}{(2k-1)k_1k_2},\\
&\qquad\vdots\\
&k_p w_{n-1} = 2(k-1)M_p - \frac{cx}{(2k-1)k_1k_2\ldots k_{p-1}} + cx,
\end{aligned}$$

so dass

$$L = k_p,\ M = 2(k-1)M_p,\ N = c\left(1 - \frac{1}{(2k-1)k_1k_2\ldots k_{p-1}}\right).$$

Setzt man weiter:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{m_n}{2k-1}+m_{(p-1)k}=M'_1,\quad \frac{M'_1}{k_1}+m_{(p-2)k}=M'_2,\\&\frac{M'_2}{k_2}+m_{(p-3)k}=M'_3,\ldots,\quad \frac{M'_{p-1}}{k_{p-1}}+m=M'_p,\end{aligned}\right\}\qquad (E')$$

so hat man eben so

$$L'=k_p=L,\quad M'=2(k-1)M'_p,$$
$$N'=c\left(\frac{1}{(2k-1)k_1k_2\ldots k_{p-1}}-1\right)=-N.$$

Demnach ist

$$\left.\begin{aligned}&x=\frac{2(k-1)(M_p-M'_p)}{nk_p+2c\left(\frac{1}{k_1k_2\ldots k_{p-1}(2k-1)}-1\right)},\\&\text{mit dem Gewichte:}\\&\frac{a}{2k_p}\left[nk_p+2c\left(\frac{1}{k_1k_2\ldots k_{p-1}(2k-1)}-1\right)\right].\end{aligned}\right\}\qquad (F)$$

Was k_p anbelangt, so ist, wie leicht ersichtlich:

$$k_p=2k-1-\cfrac{1}{2k-\cfrac{1}{2k-\cfrac{1}{2k-\cfrac{1}{\ddots\;2k-\cfrac{1}{2k-1}}}}},\qquad (G)$$

wo der Kettenbruch die Grösse $2k$ in seinen Nennern $p-1$mal wiederholt. Sonst ist

$$k_r=2k-\cfrac{1}{2k-\cfrac{1}{2k-\cfrac{1}{\ddots\;2k-\cfrac{1}{2k-1}}}},\qquad (G)$$

wo $2k$ in den Nennern $r-1$mal wiederholt ist.

Um eine Näherung zu erhalten, wollen wir annehmen, n, sowie p seien ziemlich gross, so ist, da $k>1$, also $k_1, k_2,\ldots, k_p$ desgleichen >1, die Grösse $\frac{1}{k_1\ldots k_p(2k-1)}$ sehr klein, so

dass wir sie vernachlässigen wollen. Was k_p anbelangt, so wollen wir den Kettenbruch (G) als geradezu unendlich ansehen und seinen Werth mit z bezeichnen, also setzen

$$z = \frac{1}{2k - z}, \; z^2 - 2kz = -1, \; z = k \pm \sqrt{k^2 - 1},$$

wo, da $z < 1$, wegen $k > 1$ das untere Zeichen zu wählen ist, mithin näherungsweise

$$k_p = 2k - 1 - k + \sqrt{k^2 - 1} = k - 1 + \sqrt{k^2 - 1},$$

so dass also, wenn n sehr gross, und ebenso p, (wo $n = pc$), näherungsweise das Gewicht von x ist:

$$\frac{apc}{2} - \frac{ac}{k - 1 + \sqrt{k^2 - 1}} = \frac{ac}{2}\left(p - \frac{2}{\sqrt{k-1}(\sqrt{k-1} + \sqrt{k+1})}\right)$$

$$= \frac{ac}{2}\left(p + \frac{2(\sqrt{k-1} - \sqrt{k+1})}{2\sqrt{k-1}}\right) = \frac{ac}{2}\left(p + 1 - \sqrt{\frac{k+1}{k-1}}\right),$$

$$k = \frac{cb}{a} + 1.$$

Hat man bloss eine Ablesung zu Anfang und Ende (die gewöhnliche Art), so ist $p = 1$, $c = n$, mithin sind jetzt die (D):

$$\left(2\gamma + \frac{1}{n}\right)u - \frac{1}{n} w_{n-1} = 2m\gamma - x,$$

$$-\frac{1}{n} u + \left(2\gamma + \frac{1}{n}\right) w_{n-1} = 2m_n\gamma + x,$$

woraus, indem man u eliminirt:

$$(4n^2\gamma^2 + 4n\gamma) w_{n-1} = 2n\gamma(2n\gamma m_n + m_n + m) + 2n^2\gamma x,$$

$$L = 4n\gamma(n\gamma + 1), \; M = 2n\gamma(2n\gamma m_n + m_n + m), \; N = 2n^2\gamma,$$

und indem man w_{n-1} eliminirt:

$$(4n^2\gamma^2 + 4n\gamma) u = 2n\gamma(2n\gamma m + m + m_n) - 2n^2\gamma x,$$

$$L' = 4n\gamma(n\gamma + 1), \; M' = 2n\gamma(2n\gamma m + m + m_n), \; N' = -2n^2\gamma$$

Also ist jetzt

$$x = \frac{2n\gamma(2n\gamma m_n + m_n + m)4n\gamma(n\gamma + 1) - 2n\gamma(2n\gamma m + m + m_n)4n\gamma(n\gamma + 1)}{16n^3\gamma^2(n\gamma + 1)^2 - 2n^2\gamma . 4n\gamma(n\gamma + 1) - 2n^2\gamma . 4n\gamma(n\gamma + 1)}$$

$$= \frac{m_n - m}{n}, \qquad (H)$$

mit dem Gewichte

$$\frac{16n^3\gamma^2(n\gamma+1)^2-16n^3\gamma^2(n\gamma+1)}{32n^2\gamma^2(n\gamma+1)^2}\,a=\frac{n^2\gamma a}{2(n\gamma+1)},$$

oder da $\gamma=\frac{b}{a}=\frac{\alpha^2}{\beta^2}$, $a=\frac{1}{\alpha^2}$, so ist das Gewicht:

$$\frac{n^2}{2(n\alpha^2+\beta^2)}. \qquad (H')$$

Wie wir in dem vierten Beispiele des §. 5 gesagt, sind dort die Gewichte geradezu den Repetitionszahlen proportional genommen. Dies setzt voraus, dass man β^2 gegen $n\alpha^2$ vernachlässigt; dann wird freilich die Formel (H') zu $\frac{n^2}{2n\alpha^2}=\frac{\frac{1}{2}n}{\alpha^2}$. Hat man nur eine einfache Winkelbeobachtung gemacht, so war der wahrscheinliche Fehler $=\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)}$; würde man denselben Winkel $n$mal einfach beobachtet haben, und hätte dann aus allen Beobachtungen das arithmetische Mittel genommen, so wäre der wahrscheinliche Fehler des Endresultats (§. 8) gleich $\sqrt{\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{n}}$; ist aber derselbe durch $n$fache Repetition, ohne Zwischenablesung, nach der Formel $x=\frac{m_n-m}{n}$ gefunden, so ist nach (H') der wahrscheinliche Fehler $=\sqrt{\frac{2(n\alpha^2+\beta^2)}{n^2}}=\sqrt{\frac{2\left(\alpha^2+\frac{\beta^2}{n}\right)}{n}}$. Da aber immer $\sqrt{\frac{2(\alpha^2+\beta^2)}{n}}>\sqrt{\frac{2\left(\alpha^2+\frac{\beta^2}{n}\right)}{n}}$, so ist das gewöhnliche Repetitionsverfahren im Vortheil gegen die Winkelbestimmung mittelst des Satzes vom arithmetischen Mittel. Ist jedoch β^2 gegen $n\alpha^2$ zu vernachlässigen, so ist dieser Vortheil unbedeutend.

Was α und β anbelangt, so ist $\sqrt{2(\alpha^2+\beta^2)}$ der wahrscheinliche Fehler einer einfachen Winkelmessung, den man nach §. 10 durch vielfaches Messen von Winkeln ermitteln kann. So fand Bessel (vergl. „Gradmessung in Ostpreussen von Bessel“ S. 73, „Astronomische Nachrichten“ 1834, Nr. 256) aus 55 Beob-

achtungen dreier Winkel: $\alpha^2 + \beta^2 = 4{,}2052$, zugleich schätzt er $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{1}{5}$, so dass für $c = 5$, $c\gamma = 1$, $k = 2$ wird. Dann ist $\alpha^2 = 0{,}7008$, $\beta^2 = 3{,}5044$, $a = \frac{1}{\alpha^2}$, $b = \frac{1}{\beta^2}$.

Berechnet man, indem man voraussetzt, die Ablesungen geschehen von 5 zu 5 ($c = 5$), nach der Formel (F) den Winkel, so erhält man nach Bessel:

Gesammtzahl der Repetitionen.	Werth des Winkels.	Gewicht.
5	$\frac{m_5 - m}{5}$	1,783
10	$\frac{m_{10} - m}{10}$	4,754
15	$\frac{5(m_{15} - m) + m_{10} - m_5}{80}$	8,150
20	$\frac{4(m_{20} - m) + m_{15} - m_5}{90}$	11,669
25	$\frac{19(m_{25} - m) + 5(m_{20} - m_5) + m_{15} - m_{10}}{555}$	15,222
30	$\frac{15(m_{30} - m) + 4(m_{25} - m_5) + m_{20} - m_{10}}{540}$	18,784
35	$\frac{71(m_{35} - m) + 19(m_{30} - m_5) + 5(m_{25} - m_{10}) + m_{20} - m_{15}}{3040}$	22,349
40	$\frac{56(m_{40} - m) + 15(m_{35} - m_5) + 4(m_{30} - m_{10}) + m_{25} - m_{15}}{2780}$	25,914

wobei natürlich die obigen Werthe von k und $a\left(=\frac{1}{\alpha^2}\right)$ zu Grunde gelegt sind.

Für den Fall der blossen Ablesung zu Anfang und Ende hätte man natürlich nach (H) und (H') zu verfahren.

Nach den angegebenen Formeln hat Bessel a. a. O. seine Repetitionsbeobachtungen berechnet. So theilt er S. 231 folgende Resultate mit:

		Vervielfältigungen.		Winkel.	Gewicht.
1835. Aug.	29	0	0° 5′ 59,75″	41° 47′ 10,293″	18,784
		5	209 1 53,00		
		10	57 57 50,25		
		15	266 53 34,25		
		20	115 49 21,50		
		25	324 45 20,00		
		30	173 41 9,00		
	30	0	0 0 20,00	41° 47′ 10,249″	25,914
		5	208 56 13,00		
		10	57 52 5,00		
		15	266 47 50,00		
		20	315 43 40,00		
		25	324 39 30,00		
		30	173 35 21,25		
		35	22 31 16,25		
		40	231 27 11,75		

Beispiele zur allgemeinen Theorie.

§. 15.

I. Empirische Formel zur Darstellung periodischer Erscheinungen.

Eine Menge Erscheinungen in der Natur wiederholen sich in gewissen Perioden, so die Temperatur des Tages, die Barometerstände u. s. w. Um nun dieselben, ihrem Zahlenwerthe nach, durch eine Formel auszudrücken, wollen wir uns den Umfang der Periode in n gleiche Theile getheilt denken (z. B. bei den Temperaturen den Tag in 24 Stunden), und setzen

$$\left.\begin{aligned} T = A + a_1 \sin.\left(\frac{2\pi}{n} x + \alpha_1\right) + a_2 \sin.\left(\frac{2\pi}{n} \cdot 2x + \alpha_2\right) + \cdots \\ + a_{n-1} \sin.\left(\frac{2\pi}{n} \cdot (n-1)x + \alpha_{n-1}\right), \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

wo T den Werth der zu beobachtenden oder durch Rechnung zu bestimmenden Grösse in dem Zeitpunkte x vorstellt*). Die Grössen A, a_1, α_1, ..., a_{n-1}, α_{n-1} sind $2n - 1$ Constanten, die aus gemachten Beobachtungen zu ermitteln sind. Dazu gehören aber mindestens ebenso viele Beobachtungen; hat man deren mehr, so muss natürlich die Rechnung nach §. 3 geführt

*) Gesetzt etwa, es handle sich um die Temperatur in einem bestimmten Augenblicke des Tages, und sei $n = 24$, so stellte also T die Temperatur zur Zeit x vor, wo dann die Zeit etwa von Mittag an gerechnet ist. Dasselbe gilt, wenn es sich um den Barometerstand u. s. w. handelt. Das später zu gebende Beispiel wird ohnehin die Sache weiter erläutern.

werden. Die Formel (34) kann, wie man leicht sieht, auch so geschrieben werden:

$$\left.\begin{aligned} T = A &+ A_1 \sin. \frac{2\pi x}{n} + A_2 \sin. \frac{4\pi x}{n} + \cdots \\ &\qquad + A_{n-1} \sin. \frac{2(n-1)\pi x}{n} \\ &+ B_1 \cos. \frac{2\pi x}{n} + B_2 \cos. \frac{4\pi x}{n} + \cdots \\ &\qquad + B_{n-1} \cos. \frac{2(n-1)\pi x}{n} \end{aligned}\right\} \quad (34')$$

wo $A_r = a_r \cos. \alpha_r$, $B_r = a_r \sin. \alpha_r$, und wenn $A, A_1, \ldots, A_{n-1}, B_1, \ldots, B_{n-1}$ bestimmt sind, so kennt man auch die Constanten in (34). In der Regel begnügt man sich mit einigen der ersten Glieder der Formel (34), z. B. mit den drei ersten. Behufs der Bestimmung der Constanten wollen wir nun annehmen, es liegen n Werthe von T vor, die $x = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ entsprechen, wo man also in der Formel (34) nur so viele Glieder beibehält, dass die Zahl der zu bestimmenden Constanten geringer ist, als n. Die Werthe von T seien $T_0, \ldots, T_{n-1}$, so dass in (34'):

$$\begin{aligned} T_0 &= A + A_1 \sin. \frac{0\,.\,2\pi}{n} + A_2 \sin. \frac{0\,.\,4\pi}{n} + \cdots \\ &\qquad + B_1 \cos. \frac{0\,.\,2\pi}{n} + B_2 \cos. \frac{0\,.\,4\pi}{n} + \cdots, \\ T_1 &= A + A_1 \sin. \frac{1\,.\,2\pi}{n} + A_2 \sin. \frac{1\,.\,4\pi}{n} + \cdots \\ &\qquad + B_1 \cos. \frac{1\,.\,2\pi}{n} + B_2 \cos. \frac{1\,.\,4\pi}{n} + \cdots, \\ &\vdots \\ T_{n-1} &= A + A_1 \sin. \frac{(n-1)\,2\pi}{n} + A_2 \sin. \frac{(n-1)\,4\pi}{n} + \cdots, \\ &\qquad + B_1 \cos. \frac{(n-1)\,2\pi}{n} + B_2 \cos. \frac{(n-1)\,4\pi}{n} + \cdots. \end{aligned}$$

Nehmen wir alle Beobachtungen vom gleichen Gewichte 1 an, so muss also (§. 3) die Grösse

$$\left(A + A_1 \sin. \frac{0.2\pi}{n} + \cdots + B_1 \cos. \frac{0.2\pi}{n} + \cdots - T_0\right)^2 + \cdots$$
$$+ \left(A + A_1 \sin. \frac{(n-1)2\pi}{n} + \cdots + B_1 \cos. \frac{(n-1)2\pi}{n} + \cdots - T_{n-1}\right)^2$$

ein Minimum sein. Differenzirt man nun nach A, $A_1, \ldots,$ $B_1, \ldots$ und bezeichnet zur Abkürzung durch Σ eine Summe, die man erhält, wenn man x nach einander $0, 1, 2, \ldots, n-1$ setzt, so ist:

$$nA + A_1 \sum \sin. \frac{2\pi x}{n} + A_2 \sum \sin. \frac{4\pi x}{n} + \cdots + B_1 \sum \cos. \frac{2\pi x}{n}$$
$$+ B_2 \sum \cos. \frac{4\pi x}{n} + \cdots = \sum T_x,$$

$$A \sum \sin. \frac{2\pi x}{n} + A_1 \sum \sin.^2 \frac{2\pi x}{n} + A_2 \sum \sin. \frac{2\pi x}{n} \sin. \frac{4\pi x}{n} + \cdots$$
$$+ B_1 \sum \cos. \frac{2\pi x}{n} \sin. \frac{2\pi x}{n} + B_2 \sum \cos. \frac{4\pi x}{n} \sin. \frac{2\pi x}{n} + \cdots$$
$$= \sum T_x \sin. \frac{2\pi x}{n},$$

$$A \sum \sin. \frac{4\pi x}{n} + A_1 \sum \sin. \frac{2\pi x}{n} \sin. \frac{4\pi x}{n} + A_2 \sum \sin.^2 \frac{4\pi x}{n} + \cdots$$
$$+ B_1 \sum \cos. \frac{2\pi x}{n} \sin. \frac{4\pi x}{n} + B_2 \sum \sin. \frac{4\pi x}{n} \cos. \frac{4\pi x}{n} + \cdots$$
$$= \sum T_x \sin. \frac{4\pi x}{n},$$

$$\vdots$$

$$A \sum \cos. \frac{2\pi x}{n} + A_1 \sum \sin. \frac{2\pi x}{n} \cos. \frac{2\pi x}{n} + A_2 \sum \sin. \frac{4\pi x}{n} \cos. \frac{2\pi x}{n} + \cdots$$
$$+ B_1 \sum \cos.^2 \frac{2\pi x}{n} + B_2 \sum \cos. \frac{4\pi x}{n} \cos. \frac{2\pi x}{n} + \cdots$$
$$= \sum T_x \cos. \frac{2\pi x}{n},$$

$$A \sum \cos. \frac{4\pi x}{n} + A_1 \sum \sin. \frac{2\pi x}{n} \cos. \frac{4\pi x}{n} + A_2 \sum \sin. \frac{4\pi x}{n} \cos. \frac{4\pi x}{n} + \cdots$$
$$+ B_1 \sum \cos. \frac{2\pi x}{n} \cos. \frac{4\pi x}{n} + B_2 \sum \cos.^2 \frac{4\pi x}{n} + \cdots$$
$$= \sum T_x \cos. \frac{4\pi x}{n},$$

$$\vdots$$

Nun ist aber (vergl. meine „Grundzüge der algebraischen Analysis“ S. 88, 89):

$$\sum \sin.\frac{2\pi x}{n}=0,\quad \sum \sin.\frac{4\pi x}{n}=0,\ldots;\quad \sum \cos.\frac{2\pi x}{n}=0,$$

$$\sum \cos.\frac{4\pi x}{n}=0,\ldots;$$

$$\sum \sin.^2\frac{2\pi x}{n}=\sum\frac{1-\cos.\frac{4\pi x}{n}}{2}=\frac{n}{2};\quad \sum \sin.^2\frac{4\pi x}{n}=\frac{n}{2},\ldots;$$

$$\sum \sin.\frac{2\pi x}{n}\sin.\frac{4\pi x}{n}=\tfrac{1}{2}\sum \cos.\frac{2\pi x}{n}-\tfrac{1}{2}\sum \cos.\frac{6\pi x}{n}=0,$$

$$\sum \sin.\frac{2\pi x}{n}\sin.\frac{6\pi x}{n}=0,\ldots;$$

$$\sum \cos.\frac{2\pi x}{n}\cos.\frac{4\pi x}{n}=0,\quad \sum \cos.\frac{2\pi x}{n}\cos.\frac{6\pi x}{n}=0,\ldots;$$

$$\sum \sin.\frac{2\pi x}{n}\cos.\frac{2\pi x}{n}=0, \text{ u. s. w.}$$

allgemein

$$\sum \sin.\frac{2m\pi x}{n}\sin.\frac{2m'\pi x}{n}=0,\quad \sum \sin.\frac{2m\pi x}{n}\cos.\frac{2m'\pi x}{n}=0,$$

$$\sum \cos.\frac{2m\pi x}{n}\cos.\frac{2m'\pi x}{n}=0,$$

$$\sum \sin.^2\frac{2m\pi x}{n}=\frac{n}{2},\quad \sum \cos.^2\frac{2m\pi x}{n}=\frac{n}{2},$$

so dass also

$$\left.\begin{aligned} nA=\sum T_x,\ \frac{n}{2}A_1=\sum T_x\sin.\frac{2\pi x}{n},\ \frac{n}{2}A_2=\sum T_x\sin.\frac{4\pi x}{n},\ldots,\\ \frac{n}{2}B_1=\sum T_x\cos.\frac{2\pi x}{n},\ \frac{n}{2}B_2=\sum T_x\cos.\frac{4\pi x}{n},\ldots,\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

aus welchen Gleichungen die Constanten bestimmt werden können.

Da aber

$$-\sin.\frac{2\pi}{n}=\sin.\frac{2(n-1)\pi}{n},\quad -\sin.\frac{4\pi}{n}=\sin.\frac{2(n-2)\pi}{n},\ \text{u. s. w.},$$

so lassen sich die Glieder der zweiten Seiten in (35) noch etwas zusammenziehen, was wir jedoch in der allgemeinen Form unterlassen wollen, indem wir uns zugleich zu einem besonderen Falle wenden, nämlich darstellen die

Tagestemperatur durch $T_x = A + a_1 \sin. (x \,.\, 15^0 + \alpha_1)$
$+ a_2 \sin. (x \,.\, 30^0 + \alpha_2) + a_3 \sin. (x \,.\, 45^0 + \alpha_3)$,
wobei T_x die Temperatur zur $x$ten Stunde bedeutet, und oben $n = 24$, also $\frac{2\pi}{n} = 15^0$ ist. Kennt man nun $T_0, \ldots, T_{23}$, d. h. die Temperaturen zur Stunde 0 (Mittag), 1, 2, . . ., 23 (wo wir von Mittag bis wieder Mittag von 0 bis 24 rechnen), so geben die (35):

$$24 A = T_0 + T_1 + \cdots + T_{23};$$

$$\begin{aligned}
12 A_1 &= T_0 \sin. 0 + T_1 \sin. 15^0 + T_2 \sin. 2 \,.\, 15^0 + \cdots \\
&\qquad + T_{23} \sin. 23 \,.\, 15^0 \\
&= (T_1 + T_{11} - T_{13} - T_{23}) \sin. 15^0 + (T_2 + T_{10} - T_{14} - T_{22}) \\
&\qquad \sin. 30^0 \\
&+ (T_3 + T_9 - T_{15} - T_{21}) \sin. 45^0 + (T_4 + T_8 - T_{16} - T_{20}) \\
&\qquad \sin. 60^0 \\
&+ (T_5 + T_7 - T_{17} - T_{19}) \sin. 75^0 + T_6 - T_{18},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12 B_1 &= T_0 \cos. 0 + T_1 \cos. 15^0 + \cdots + T_{23} \cos. 23 \,.\, 15^0 \\
&= (T_1 - T_{11} - T_{13} + T_{23}) \cos. 15^0 + (T_2 - T_{10} - T_{14} + T_{22}) \\
&\qquad \cos. 30^0 \\
&+ (T_3 - T_9 - T_{15} + T_{21}) \cos. 45^0 + (T_4 - T_8 - T_{16} + T_{20}) \\
&\qquad \cos. 60^0 \\
&+ (T_5 - T_7 - T_{17} + T_{19}) \cos. 75^0 + T_0 - T_{12},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12 A_2 &= T_0 \sin. 0 + T_1 \sin. 30^0 + T_2 \sin. 2 \,.\, 30^0 + \cdots \\
&\qquad + T_{23} \sin. 23 \,.\, 30^0 \\
&= (T_1 + T_5 - T_7 - T_{11} + T_{13} + T_{17} - T_{19} - T_{23}) \\
&\qquad \sin. 30^0 \\
&+ (T_2 + T_4 - T_8 - T_{10} + T_{14} + T_{16} - T_{20} - T_{22}) \\
&\qquad \sin. 60^0 + T_3 - T_9 + T_{15} - T_{21},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12 B_2 &= T_0 \cos. 0 + T_1 \cos. 30^0 + \cdots + T_{23} \cos. 23 \,.\, 30^0 \\
&= (T_1 - T_5 - T_7 + T_{11} + T_{13} - T_{17} - T_{19} + T_{23}) \\
&\qquad \cos. 30^0 \\
&+ (T_2 - T_4 - T_8 + T_{10} + T_{14} - T_{16} - T_{20} + T_{21}) \\
&\qquad \cos. 60^0 + T_0 - T_6 + T_{12} - T_{18},
\end{aligned}$$

$$12\,A_3 = T_0 \sin. 0 + T_1 \sin. 45^0 + T_2 \sin. 2 . 45^0 + \cdots + T_{23} \sin. 23 . 45^0$$
$$= (T_1 + T_3 - T_5 - T_7 + T_9 + T_{11} - T_{13} - T_{15}$$
$$+ T_{17} + T_{19} - T_{21} - T_{23}) \sin. 45^0$$
$$+ T_2 - T_6 + T_{10} - T_{14} + T_{18} - T_{22},$$

$$12\,B_3 = T_0 \cos. 0 + T_1 \cos. 45^0 + \cdots + T_{23} \cos. 23 . 45^0$$
$$= (T_1 - T_3 - T_5 + T_7 + T_9 - T_{11} - T_{13} + T_{15}$$
$$+ T_{17} - T_{19} - T_{21} + T_{23}) \cos. 45^0$$
$$+ T_0 - T_4 + T_8 - T_{12} + T_{16} - T_{20}.$$

Da $A_1 = a_1 \cos. \alpha_1$, $A_2 = a_2 \cos. \alpha_2$, $B_1 = a_1 \sin. \alpha_1$, $B_2 = a_2 \sin. \alpha_2$, so ergeben sich hieraus leicht a_1, a_2, α_1, α_2.

Als Zahlenbeispiel wählen wir die Beobachtungen von Chiminello in Padua („Kämtz, Meteorologie" I, S. 69), die als Werthe der Temperaturen für jede Tagesstunde geben (diese Beobachtungen sind die arithmetischen Mittel aus den täglichen Beobachtungen im ganzen Jahre):

Stunde	0, $T_0 = 16{,}17^0$,		Stunde	12, $T_{12} = 12{,}19$,	
„	1, $T_1 = 16{,}56$,		„	13, $T_{13} = 11{,}94$,	
„	2, $T_2 = 16{,}79$,		„	14, $T_{14} = 11{,}66$,	
„	3, $T_3 = 16{,}75$,		„	15, $T_{15} = 11{,}39$,	
„	4, $T_4 = 16{,}27$,		„	16, $T_{16} = 11{,}17$,	
„	5, $T_5 = 15{,}61$,		„	17, $T_{17} = 11{,}10$,	
„	6, $T_6 = 14{,}86$,		„	18, $T_{18} = 11{,}48$,	
„	7, $T_7 = 14{,}19$,		„	19, $T_{19} = 12{,}12$,	
„	8, $T_8 = 13{,}68$,		„	20, $T_{20} = 12{,}99$,	
„	9, $T_9 = 13{,}12$,		„	21, $T_{21} = 14{,}09$,	
„	10, $T_{10} = 12{,}78$,		„	22, $T_{22} = 14{,}93$,	
„	11, $T_{11} = 12{,}48$,		„	23, $T_{23} = 15{,}59$.	

Hiernach ergiebt sich

$$A = 13{,}7463,\quad A_1 = 1{,}6446,\quad A_2 = 0{,}2211,\quad A_3 = -0{,}0731,$$
$$B_1 = 2{,}0886,\quad B_2 = 0{,}5099,\quad B_3 = -0{,}0971,$$

woraus $a_1 = 2{,}6589$, $\alpha_1 = 51^0 47'$; $a_2 = 0{,}5558$, $\alpha_2 = 66^0 33'$; $a_3 = 0{,}1220$, $\alpha_3 = 233^0$, so dass das Mittel aus allen Temperaturen im ganzen Jahre für die $x$te Stunde dargestellt wird durch

$$T_x = 13{,}7463 + 2{,}6589 \sin. (x \,.\, 15^0 + 51^0 47') + 0{,}5558 \sin. (x \,.\, 30^0 + 66^0 33') + 0{,}1220 \sin. (x \,.\, 45^0 + 233^0).$$

Was die Gewichte der Grössen $A, A_1, \ldots$ anbelangt, so folgt leicht aus §. 7, Formeln (23), dass das von A gleich 24, das jeder anderen Grösse = 12 ist, wenn man die Gleichungen (35) mit in Betracht zieht. Behufs der Berechnung des wahrscheinlichen Fehlers hat man nun, nach der eben gefundenen Formel für $x = 0, 1, \ldots, 23$ die Werthe von T_x zu berechnen und sie mit den durch Beobachtung gegebenen zu vergleichen, um die in (33') des §. 10 eintretenden v zu ermitteln. Zugleich ist dort $g = 1$, $m = 24$, $n = 7$, $r = 0$. Man hat so:

St.	Beobach.	Berechn.	v	gv^2	St.	Beobach.	Berechn.	v	gv^2
0	16,17	16,25	0,08	0,0064	12	12,19	12,26	0,07	0,0049
1	16,56	16,65	09	81	13	11,94	11,98	4	16
2	16,79	16,77	— 2	4	14	11,66	11,65	— 1	1
3	16,75	16,64	— 11	121	15	11,39	11,33	— 6	36
4	16,27	16,27	0		16	11,17	11,14	— 3	9
5	15,61	15,67	6	36	17	11,10	11,19	9	81
6	14,86	14,97	11	121	18	11,48	11,54	6	36
7	14,19	14,24	5	25	19	12,12	12,18	6	36
8	13,68	13,58	— 10	100	20	12,99	13,02	3	9
9	13,12	13,10	— 2	4	21	14,09	13,95	14	196
10	12,78	12,75	— 3	9	22	14,93	14,87	— 6	36
11	12,48	12,50	2	4	23	15,59	15,65	6	36
				0,0569					0,0541

also $[gv_0^2] = 0{,}1110$, mithin der wahrscheinliche Fehler der einfachen Beobachtung $= 0{,}6745 \sqrt{\frac{0{,}111}{17}} = 0{,}061$; von den 24 Beobachtungsfehlern liegen 10 unter 0,06, 8 über 0,65, und 6 sind $=$ 0,06, so dass die Vertheilung so ziemlich den theoretischen Erwartungen entspricht. Da $\frac{\varrho}{\sqrt{24}} = 0{,}09735$, also 1 —

$\frac{\varrho}{\sqrt{24}} = 0{,}90264$, $1 + \frac{\varrho}{\sqrt{24}} = 1{,}09735$, so kann (§. 12) der wahrscheinliche Fehler schwanken zwischen $0{,}061 \,.\, 0{,}9026 = 0{,}054$ und $0{,}061 \,.\, 1{,}0973 = 0{,}066$, was obige Vertheilung der Fehler noch besser mit der Theorie zusammenstimmen lässt. Allerdings müsste man, um eine Prüfung in dieser Beziehung vorzunehmen, die einzelnen Beobachtungen vom ganzen Jahre vor sich haben und hiernach sowohl $[g v_0^2]$, als den wahrscheinlichen Fehler, sowie die Vertheilung der Fehler berechnen.

II. Bestimmung der geographischen Breite aus Zenithdistanzen im Meridian, und der Durchbiegung des angewandten Fernrohrs.

Da die Metalle, aus denen die verschiedenen Theile der Winkelmessinstrumente verfertigt werden, nicht vollkommen hart sind, so wird immer unter dem Einfluss der Schwere eine Biegung einzelner Theile stattfinden, welche auf die Richtigkeit gemessener Winkel natürlich von nachtheiligem Einfluss ist. Von solchem ist bei Messung von Zenithdistanzen namentlich die Durchbiegung des Fernrohrs nach der Richtung seiner Axe. Man kann eine solche offenbar vergleichen mit der Wirkung eines Gewichts, das an einem Ende des Fernrohrs angebracht wird. Die auf der Richtung der Axe senkrechte Seitenkraft desselben bringt die genannte Biegung, die dieser Seitenkraft proportional ist, hervor. Ist also b die Biegung, wenn das Fernrohr horizontal liegt, so wird, wenn es um den Winkel h erhoben wird, $b \cos. h$ dieselbe sein; ist also z die Zenithdistanz des Fernrohrs, d. h. der Winkel, den die Richtung der Axe mit der Verticalen macht, so ist $h = 90^0 - z$, und also $b \sin. z$ die Durchbiegung, wobei b positiv oder negativ sein kann. Beobachtet man also mit einem solchen Fernrohr die Zenithdistanz eines Gestirns, und findet dieselbe $= z$, so ist $z + b \sin. z$ die wahre Zenithdistanz.

Gesetzt nun man beobachte die Zenithdistanz eines Sterns in dem Augenblicke, da er durch den Meridian geht, und sei z dieselbe, δ die Declination des Sterns, b die Durchbiegung des Fernrohrs in horizontaler Lage, φ die Breite des Beobachtungsortes, so hat man:

a) wenn der Stern zwischen Pol und Zenith durch den Meridian geht

$$\delta = \varphi + z + b \sin. z, \quad \varphi = \delta - (z + b \sin. z):$$

b) wenn der Stern zwischen Pol und Horizont durch den Meridian geht, das Zenith sich aber nicht zwischen Stern und Pol befindet

$$\delta + z + b \sin. z = 180^0 - \varphi, \quad \varphi = 180^0 - \delta - (z + b \sin. z);$$

c) wenn wie in b; nur befindet sich das Zenith zwischen Stern und Pol

$$\delta + z + b \sin. z = \varphi, \quad \varphi = \delta + (z + b \sin. z).$$

Im Falle a befindet sich ein Stern in seiner oberen Culmination, ebenso im Falle c; im Falle b befindet er sich dagegen in seiner unteren Culmination.

Wir wollen nun die nachfolgenden Beobachtungen berechnen („Sawitsch: Abriss der praktischen Astronomie u. s. w.“ I, S. 276):

Stern.	Culmination.	Zenithdistanz.	Declination.	Zahl der Beobachtungen.
α Kleiner Bär	Obere	28° 23′ 4,1″	88° 19′ 39,7″	46
α Andromeda	„	31 51 42,7	28 4 43,9	32
α Grosser Bär	Untere	57 18 58,2	62 44 24,1	42
α Adler	Obere	51 32 45,8	8 23 38,6	38

Also wenn b und φ die obige Bedeutung haben, so ist

$$\varphi = 88^0 19' 39{,}7'' - (28^0 23' 4{,}1'' + b \sin. 28^0 23' 4{,}1'')$$
(Gew. 46),

$$\varphi = 28^0 \; 4' 43{,}9'' + 31^0 51' 42{,}7'' + b \sin. 31^0 51' 42{,}7''$$
(Gew. 32),

$$\varphi = 180^0 - 62^0 44' 24{,}1'' - (57^0 18' 58{,}2'' + b \sin. 57^0 18' 58{,}2'')$$
(Gew. 42),

$$\varphi = \; 8^0 23' 38{,}6'' + 51^0 32' 45{,}8'' + b \sin. 51^0 32' 45{,}8''$$
(Gew. 38),

woraus nun die wahrscheinlichsten Werthe von φ und b zu er-

mitteln sind. Näherungsweise setzen wir $\varphi = 59^0\,56'\,30''$, **also** genau $\varphi = 59^0\,56'\,30'' + \varphi'$ und haben dann:

$$\begin{aligned}
\varphi' + b\ sin.\ 28^0\,23'\ 4{,}1'' &= 5{,}6\ (\text{Gew. } 46),\\
\varphi' - b\ sin.\ 31^0\,51'\,42{,}7'' &= -3{,}4\ (\ ,,\ \ 32),\\
\varphi' + b\ sin.\ 57^0\,18'\,58{,}2'' &= 7{,}7\ (\ ,,\ \ 42),\\
\varphi' - b\ sin.\ 51^0\,32'\,45{,}8'' &= -5{,}6\ (\ ,,\ \ 38).
\end{aligned}$$

Vergleicht man mit den (6) in §. 3, so ist

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1, & b_1 &= sin.\ 28^0\,23'\ 4{,}1'', & g_1 &= 46, & F_1 &= 5{,}6;\\
a_2 &= 1, & b_2 &= -sin.\ 31^0\,51'\,42{,}7'', & g_2 &= 32, & F_2 &= -3{,}4;\\
a_3 &= 1, & b_3 &= sin.\ 57^0\,18'\,58{,}2'', & g_3 &= 42, & F_3 &= 7{,}7;\\
a_4 &= 1, & b_4 &= -sin.\ 51^0\,32'\,45{,}8'', & g_4 &= 38, & F_4 &= -5{,}6;
\end{aligned}$$

woraus

$$[ga^2] = 158,\quad [gab] = 10{,}56,\quad [gb^2] = 72{,}36,$$
$$[gaF] = 259{,}40,\quad [gbF] = 618{,}82,$$

also

$$158\ \varphi' + 10{,}56\ b = 259{,}40,$$
$$10{,}56\ \varphi' + 72{,}36\ b = 618{,}82,\quad \varphi' = 1{,}08,\quad b = 8{,}40,$$

so dass der wahrscheinlichste Werth von φ ist $59^0\,56'\,31{,}08''$, während der wahrscheinlichste Werth der Durchbiegung $b = 8{,}4''$ ist.

Will man die Genauigkeit dieser Werthe prüfen, namentlich den von φ, so hat man (§. 7) die Gleichungen $158\,\varphi' + 10{,}56\,b = k$, $10{,}56\,\varphi'' + 72{,}36\,b = k'$ aufzulösen und den Coëfficienten von k in dem Werthe von φ' zu ermitteln. Derselbe ist $\frac{72{,}36}{158\ .\ 72{,}36 - 10{,}56^2}$, so dass das Gewicht von φ' ist $\frac{158\ .\ 72{,}36 - 10{,}56^2}{72{,}36} = 156{,}4$. Was den wahrscheinlichen Fehler der Beobachtung vom Gewichte 1 anbelangt, so ist für $\varphi' = 1{,}08$, $b = 8{,}40$ (§. 10):

$$\begin{aligned}
v_1 &= \varphi' + b\ sin.\ 28^0\,23' - 5{,}6 = -0{,}53, & g_1 v_1^2 &= 12{,}92,\\
v_2 &= \varphi' - b\ sin.\ 31^0\,52' + 3{,}4 = +0{,}05, & g_2 v_2^2 &= 0{,}08,\\
v_3 &= \varphi' + b\ sin.\ 57^0\,19' - 7{,}7 = +0{,}35, & g_3 v_3^2 &= 6{,}15,\\
v_4 &= \varphi' - b\ sin.\ 51^0\,33' + 5{,}6 = +0{,}10, & g_4 v_4^2 &= 0{,}38,\\
& & [gv_0^2] &= 19{,}53,
\end{aligned}$$

$$m = 4,\quad n = 2,\quad r = 0,$$

also der wahrscheinliche Fehler der Beobachtung vom Gewichte 1:

$$0{,}6745\sqrt{\frac{19{,}53}{4-2}}, \text{ von } \varphi'\text{: } \frac{0{,}6745}{\sqrt{156{,}4}}\sqrt{\frac{19{,}53}{2}} = 0{,}17'',$$

so dass also der wahrscheinliche Fehler der gefundenen Breite nur 0,17″ ist. Doch muss auch hier bemerkt werden, dass behufs genauerer Ermittelung dieser Grösse in Wahrheit die wirklichen Beobachtungen, nicht deren arithmetische Mittel, vorliegen sollten. Der soeben ermittelte wahrscheinliche Fehler selbst kann nämlich nach §. 12, da dort m nur 4 ist, innerhalb ziemlich bedeutender Gränzen unsicher sein.

III. Berechnung der Declination eines Sterns, der geographischen Breite des Beobachtungsortes und der Biegung des Instruments aus Zenithdistanzen.

Ein ähnliches Beispiel wie in II. entlehnen wir der „Bestimmung des Breitenunterschiedes zwischen den Sternwarten von Göttingen und Altona“ von Gauss (S. 64 ff.). Die Beobachtungen waren Zenithdistanzen des Nordsterns, an einem Reichenbach'schen Meridiankreise gemacht, in beiden Culminationen des Sterns, direct und von einer Wasserfläche reflectirt. Die Beobachtungen sind bloss von der Refraction befreit, also noch mit dem Collimationsfehler und der Wirkung der Biegung behaftet. Ferner sind von den hier angegebenen Beobachtungen die letzten drei mit „Kreis in Westen“ die anderen 11 mit „Kreis in Osten“ gemacht*). Die Beobachtungen sind:

1820, Mai 13, unt. Culm.	direct	319°	50′	20,73″,	3	Beobachtungen,
	reflect.	220	5	3,94,	4	„
„ ob. Culm.	direct	323	8	41,51,	1	„
	reflect.	216	46	44,31,	1	„

*) Der Collimationsfehler ist die kleine Neigung der optischen Axe des Fernrohrs gegen die auf seiner Drehaxe senkrecht stehende Gerade. „Kreis in Osten“ und „Kreis in Westen“ zeigt an, ob der Verticalkreis, der sich am Ende der Rotationsaxe befindet, und umgelegt werden kann, im Osten oder Westen dieser Axe stund, wobei zu beachten ist, dass die Axe selbst genau die Richtung Ost-West hatte.

1824, Apr. 20. ob. Culm.	direct	323°	7′	52,62″,	1	Beobachtung,
	reflect.	216	48	54,93,	2	Beobachtungen,
21. unt. Culm.	direct	319	52	30,27,	3	„
	reflect.	220	4	19,32,	4	„
ob. Culm.	direct	323	7	54,16,	3	„
	reflect.	216	48	54,21,	4	„
25. unt. Culm.	direct	319	52	30,03,	3	„
	reflect.	220	4	21,10,	4	„
27. ob. Culm.	direct	323	7	55,70,	3	„
	reflect.	216	48	52,93,	4	„
28. ob. Culm.	direct	323	7	55,40,	3	„
	reflect.	216	48	52,22,	4	„
29. unt. Culm.	direct	319	52	29,17,	3	„
	reflect.	220	4	21,34,	4	„
Mai 1. unt. Culm.	direct	319	52	28,59,	3	„
	reflect.	220	4	22,62,	4	„
ob. Culm.	direct	323	7	57,22,	3	„
	reflect.	216	48	51,66,	4	„
2. unt. Culm.	direct	40	4	20,00,	3	„
	reflect.	139	52	27,15,	4	„
8. ob. Culm.	direct	36	48	49,32,	3	„
	reflect.	143	7	57,63,	4	„
9. unt. Culm.	direct	40	4	22,93,	3	„
	reflect.	139	52	25,68,	4	„

Die Aenderungen der Declinationen des Nordsterns ergaben sich nach Bessel's Tafeln für den 13. Mai 1820 von der unteren Culmination am 13. Mai an gerechnet: — 0,10″ für die obere Culmination vom 13. Mai. Sodann von der oberen Culmination am 20. April 1824 an gerechnet:

21.	April,	untere	Culmination	= — 0,13″,
21.	„	obere	„	= — 0,26″,
25.	„	untere	„	= — 1,29″,
27.	„	obere	„	= — 2,04″,
28.	„	obere	„	= — 2,32″,
29.	„	untere	„	= — 2,45″,
1.	Mai	untere	„	= — 2,93″,
1.	„	obere	„	= — 3,03″,

2. Mai	untere Culmination		$= -3{,}14''$,
8. „	obere	„	$= -4{,}64''$,
9. „	untere	„	$= -4{,}77''$.

Bezeichnet man die Biegung des Fernrohrs, oder die Veränderung der Lage der auf die Ebene des getheilten Kreises projicirten optischen Axe gegen die Eintheilung, vermöge der Wirkung der Schwere auf sämmtliche verbundene Bestandtheile des Instruments, bei horizontaler Lage der optischen Axe mit f, bei verticaler durch g, und nimmt diese Biegung der Schwerkraft proportional an, so wird bei der Neigung z der optischen Axe die Biegung durch $f\, sin.\, z + g\, cos.\, z$ ausgedrückt werden, so dass wenn e der Collimationsfehler, z die abgelesene Zenithdistanz, die wahre Zenithdistanz $= z - e + f\, sin.\, (z - e) + g\, cos.\, (z - e)$ sein wird. g ist allerdings in der Regel sehr klein, doch wird man dasselbe nicht unbedingt weglassen dürfen.

Es ist leicht zu übersehen, dass wenn man die beiden, direct und reflectirt, beobachteten Zenithdistanzen von einander abzieht, den Unterschied halbirt, und diese Hälfte von 90^0 abzieht, man die wahre Zenithdistanz erhalten wird. Da der Collimationsfehler in beiden Beobachtungen derselbe war, so ist er aus dem Unterschiede weggefallen. Ebenso verhält es sich mit der Biegung f. Dagegen wird die von g herrührende Biegung bleiben*). Ist ferner n die Anzahl der directen, m der reflectirten Beobachtungen, so ergiebt sich für das Gewicht des so erhaltenen Resultats $= \frac{4\,mn}{m+n}$, was man in folgender Weise findet: Sei ε der wahrscheinliche Fehler der einfachen Beobachtung, so ist der der ersten Zenithdistanz (direct) z gleich $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ (§. 8), der der zweiten z': $\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$, mithin der des Resultats $90^0 - \frac{(z' - z)}{2} = 90^0 - \frac{z'}{2} + \frac{z}{2}$

*) Ist nämlich α die erste Zenithdistanz, β die durch Spiegelung gefundene, so sind die wahren: $\alpha - e + f\, sin.\, (\alpha - e) + g\, cos.\, (\alpha - e)$ und $\beta - e + f\, sin.\, (\beta - e) + g\, cos.\, (\beta - e)$, welche zwei zusammen 180^0 betragen sollen. Da also nahe $\alpha + \beta = 180^0$, so ist nahezu $sin.\, (\alpha - e) = sin.\, (\beta - e)$, $cos.\, (\beta - e) = -\, cos.\, (\alpha - e)$, wodurch die Behauptung bewiesen ist.

nach §. 6, III gleich $\sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4m}+\frac{\varepsilon^2}{4n}}=\sqrt{\frac{m+n}{4mn}}\varepsilon$, also das Gewicht dieses Resultats $=\frac{4mn}{m+n}$. Endlich ist g von verschiedenem Zeichen, je nachdem der Kreis in Osten oder Westen war. Hiernach nun hat man aus den 14 Beobachtungen als Zenithdistanzen des Nordsterns:

1)	untere Culmination:	40°	7′	21,60″,	Gewicht	$\frac{4.3.4}{3+4}=6{,}86$,
2)	obere "	36	49	1,40,	"	$\frac{4.1.1}{1+1}=2$,
3)	obere "	36	50	31,15,	"	$\frac{4.1.2}{1+2}=2{,}67$,
4)	untere "	40	5	54,52,	"	6,86,
5)	obere "	36	50	30,02,	"	6,86,
6)	untere "	40	5	55,53,	"	6,86,
7)	obere "	36	50	28,61,	"	6,86,
8)	obere "	36	50	28,41,	"	6,86,
9)	untere "	40	5	56,08,	"	6,86,
10)	untere "	40	5	57,01,	"	6,86,
11)	obere "	36	50	27,21,	"	6,86,
12)	untere "	40	5	56,42,	"	6,86,
13)	obere "	36	50	25,84,	"	6,86,
14)	untere "	40	5	58,62,	"	6,86.

Ist nun φ die gesuchte geographische Breite des Ortes, δ die Declination des Nordsterns bei seiner unteren Culmination am 13. Mai 1820, δ' die bei seiner oberen Culmination den 20. April 1824, so hat man nach II, wenn man zugleich die Aenderungen dieser Declinationen beachtet, und bemerkt, dass $\cos. 40^\circ 5' = 0{,}765$, $\cos. 36^\circ 50' = 0{,}800$:

$$\delta + \varphi + 0{,}765\,g = 180^\circ - 40^\circ 7' 21{,}60'' = 139^\circ 52' 38{,}40'' \quad \text{(Gew. 6,86)},$$

$$\delta - \varphi - 0{,}800\,g = 36^\circ 49' \; 1{,}50'' \quad \text{(Gew. 2)},$$

$$\delta' - \varphi - 0{,}800\,g = 36^\circ 50' 31{,}15'' \quad \text{(Gew. 2,67)},$$

$$\delta' + \varphi + 0{,}765\,g = 180^\circ - 40^\circ 5' 54{,}52'' + 0{,}13'' = 139^\circ 54' 5{,}61'' \quad \text{(Gew. 6,86)},$$

$$\delta' - \varphi - 0{,}800\,g = 36^\circ 50' 30{,}28'' \text{ (Gew. 6,86)},$$
$$\delta' + \varphi + 0{,}765\,g = 180^\circ - 40^\circ 5' 55{,}53'' + 1{,}29'' = 139^\circ 54' 5{,}76'' \text{ (Gew. 6,86)},$$
$$\delta' - \varphi - 0{,}800\,g = 36^\circ 50' 30{,}65'' \text{ (Gew. 6,86)},$$
$$\delta' - \varphi - 0{,}800\,g = 36^\circ 50' 30{,}73'' \text{ (Gew. 6,86)},$$
$$\delta' + \varphi + 0{,}765\,g = 180^\circ - 40^\circ 5' 56{,}08'' + 2{,}45'' = 139^\circ 54' 6{,}37'' \text{ (Gew. 6,86)},$$
$$\delta' + \varphi + 0{,}765\,g = 180^\circ - 40^\circ 5' 57{,}01'' + 2{,}93'' = 139^\circ 54' 5{,}92'' \text{ (Gew. 6,86)},$$
$$\delta' - \varphi - 0{,}800\,g = 36^\circ 50' 30{,}24'' \text{ (Gew. 6,86)},$$
$$\delta' + \varphi - 0{,}765\,g = 180^\circ - 40^\circ 5' 56{,}42'' + 3{,}14'' = 139^\circ 54' 6{,}72'' \text{ (Gew. 6,86)},$$
$$\delta' - \varphi + 0{,}800\,g = 36^\circ 50' 30{,}48'' \text{ (Gew. 6,86)},$$
$$\delta' + \varphi - 0{,}765\,g = 180^\circ - 40^\circ 5' 58{,}62'' + 4{,}77'' = 139^\circ 54' 6{,}15'' \text{ (Gew. 6,86)}.$$

Behufs bequemerer Rechnung könnte man von diesen Gleichungen die 3te, 5te, 7te, 8te, 11te, sodann wieder die 4te, 6te, 9te, 10te, zu einer (§. 4) vereinigen, was wir jedoch nicht thun wollen; nimmt man aber näherungsweise für δ, δ', φ: $88^\circ 20' 50''$, $88^\circ 22' 18''$, $51^\circ 31' 48''$, wie sich diese Werthe etwa ungefähr aus den vier ersten Gleichungen ergeben, und setzt

$$\delta = 88^\circ 20' 50'' + \Delta,\quad \delta' = 88^\circ 22' 18'' + \Delta',\quad \varphi = 51^\circ 31' 48'' + \psi,$$

so hat man

$$\begin{array}{lrl}
\Delta + \psi + 0{,}765\,g = & 0{,}40 & \text{(Gew. 6,86)}, \\
\Delta - \psi - 0{,}800\,g = & -0{,}50 & (\;,,\;\; 2), \\
\Delta' - \psi - 0{,}800\,g = & 1{,}15 & (\;,,\;\; 2{,}67), \\
\Delta' + \psi + 0{,}765\,g = & -0{,}39 & (\;,,\;\; 6{,}86), \\
\Delta' - \psi - 0{,}800\,g = & 0{,}28 & (\;,,\;\; ,,\;), \\
\Delta' + \psi + 0{,}765\,g = & -0{,}24 & (\;,,\;\; ,,\;), \\
\Delta' - \psi - 0{,}800\,g = & 0{,}65 & (\;,,\;\; ,,\;), \\
\Delta' - \psi - 0{,}800\,g = & 0{,}73 & (\;,,\;\; ,,\;), \\
\Delta' + \psi + 0{,}765\,g = & 0{,}37 & (\;,,\;\; ,,\;), \\
\Delta' + \psi + 0{,}765\,g = & -0{,}08 & (\;,,\;\; ,,\;), \\
\Delta' - \psi - 0{,}800\,g = & 0{,}24 & (\;,,\;\; ,,\;), \\
\Delta' + \psi - 0{,}765\,g = & 0{,}72 & (\;,,\;\; ,,\;), \\
\Delta' - \psi + 0{,}800\,g = & 0{,}48 & (\;,,\;\; ,,\;), \\
\Delta' + \psi - 0{,}765\,g = & 0{,}15 & (\;,,\;\; ,,\;).
\end{array}$$

Diese 14 Gleichungen sind die (6) des §. 3; setzt man dort für x, y, z, u jetzt $\varDelta$, $\varDelta'$, ψ, g, so ist $a_1 = a_2 = 1$, alle anderen a gleich 0; $b_1 = b_2 = 0$, alle anderen b gleich 1; c_1, c_4, c_6, c_9, c_{10}, c_{12}, c_{14} gleich 1, die übrigen c gleich -1; d_1, d_4, d_6, d_9, d_{10} gleich 0,765; d_{12}, d_{14} gleich $-0{,}765$; d_2, d_3, d_5, d_7, d_8, d_{10} gleich $-0{,}800$, $d_{13} = 0{,}800$; während $F_1 = 0{,}400, \ldots$, $F_{14} = 0{,}15$; $g_1 = 6{,}86, \ldots$, $g_{14} = 6{,}86$. Bildet man hiernach die Gleichungen

$$\begin{aligned}
&[ga^2]\varDelta + [gab]\varDelta' + [gac]\psi + [gad]g = [gaF],\\
&[gab]\varDelta + [gb^2]\varDelta' + [gbc]\psi + [gbd]g = [gbF],\\
&[gac]\varDelta + [gbc]\varDelta' + [gc^2]\psi + [gcd]g = [gcF],\\
&[gad]\varDelta + [gbd]\varDelta' + [gcd]\psi + [gd^2]g = [gdF]\,^{*}),
\end{aligned}$$

und löst diese Gleichungen auf, so ergiebt sich:

$\varDelta = 0{,}33$, $\varDelta' = 0{,}28$, $\psi = -0{,}10$, $g = -0{,}17$ (in Secunden),

so dass

$$\delta = 88^0\,20'\,50{,}33'',\ \delta' = 88^0\,22'\,18{,}28'',\ \varphi = 51^0\,31'\,47{,}90'',$$
$$g = -0{,}17''.$$

Lässt man die zweiten Seiten obiger vier Gleichungen unter der Form $[gaF], \ldots, [gdF]$, setzt aber auf den ersten Seiten die Werthe der Coëfficienten ein, so erhält man als Coëfficienten von $[gcF]$ in dem Werthe von ψ: 0,01644, so dass das Gewicht von ψ, also das von φ gleich $\dfrac{1}{0{,}01644} = 60{,}8$ ist (§. 7).

Setzt man die gefundenen Werthe von $\varDelta$, $\varDelta'$, ψ, g in die obigen 14 Gleichungen und subtrahirt jeweils die zweiten Seiten, so ergiebt sich, behufs der Berechnung von $[gv_0{}^2]$ in §. 10:

$v_1 = -0{,}31$, $g_1 = 6{,}86$; $v_2 = 1{,}07$, $g_2 = 2$; $v_3 = -0{,}63$, $g_3 = 2{,}67$; $v_4 = 0{,}44$, $v_5 = 0{,}23$, $v_6 = 0{,}29$, $v_7 = -0{,}13$, $v_8 = -0{,}21$, $v_9 = -0{,}31$, $v_{10} = 0{,}14$, $v_{11} = 0{,}27$, $v_{12} = -0{,}40$, $v_{13} = -0{,}23$, $v_{14} = 0{,}16$; $g_4 = g_5 = \cdots = g_{14} = 6{,}86$; $[gv_0{}^2] = 9{,}6184$.

Nun ist in §. 10, Formel (33'): $m = 14$, $n = 4$, $r = 0$,

---

*) Es findet sich $[ga^2] = 8{,}86$, $[gab] = 0$, $[gac] = 4{,}86$, $[gad] = 8{,}65$, $[gb^2] = 78{,}18$, $[gbc] = 3{,}19$, $[gbd] = -7{,}31$, $[gc^2] = 86{,}99$, $[gcd] = 25{,}94$, $[gd^2] = 52{,}78$, $[gaF] = 1{,}74$, $[gbF] = 23{,}02$, $[gcF] = -11{,}08$, $[gdF] = -13{,}70$.

also der wahrscheinliche Fehler der Beobachtung vom Gewichte 1: $0{,}6745\sqrt{\frac{9{,}6184}{10}}$, und der von φ: $0{,}6745\sqrt{\frac{9{,}6184}{10\,.\,60{,}8}} = 0{,}085''$, so dass also φ (um dessen Bestimmung es sich vorzugsweise handelte) als ziemlich scharf bestimmt angesehen werden kann.

IV. In einem Vielecke sind mehr Stücke, als zur Berechnung nöthig sind, gemessen. Dieselben auszugleichen und die etwa fehlenden zu berechnen.

In diesem Falle ereignet es sich, dass Seiten und Winkel vorkommen, die von verschiedener Art sind, während in den seitherigen Beispielen die Beobachtungen nur Grössen derselben Art betrafen. Wir wollen etwa annehmen, es seien in einem Vielecke sämmtliche Seiten und Winkel gemessen. Da aber (vergl. meine „ebene Polygonometrie“ S. 22) zwischen diesen Grössen drei Bedingungsgleichungen bestehen, so wird man also (§. 4) solche drei aufzustellen haben. Diese Aufstellung ist immer sehr einfach, da dies eben geradezu jene drei genannten Gleichungen sind. Bezeichnen aber $A_1, \ldots, A_n$, $a_1, \ldots, a_n$ die gemessenen Winkel und Seiten, und sind $A_1 + A_1'$, $A_2 + A'_2, \ldots, A_n + A'_n$, $a_1 + a'_1, \ldots, a_n + a'_n$ die wahren Werthe derselben, so erhält man, wenn man die Producte und höheren Potenzen von $A'_1, \ldots, A'_n$, $a'_1, \ldots, a'_n$ vernachlässigt:

$$\begin{aligned}
a_n + a'_n = {} & a_1 \cos. A_1 - a_2 \cos. (A_1 + A_2) + \cdots \\
& \pm a_{n-1} \cos. (A_1 + \cdots + A_{n-1}) \\
& + a'_1 \cos. A_1 - a'_2 \cos. (A_1 + A_2) + \cdots \\
& \pm a'_{n-1} \cos. (A_1 + \cdots + A_{n-1}) \\
& - a_1 \sin. A_1 . A'_1 + a_2 \sin. (A'_1 + A_2) . (A'_1 + A'_2) - \cdots \\
& \mp a_{n-1} \sin. (A_1 + \cdots + A_{n-1}) . (A'_1 + \cdots + A'_{n-1}), \\
0 = {} & a_1 \sin. A_1 - a_2 \sin. (A_1 + A_2) + \cdots \\
& \pm a_{n-1} \sin. (A_1 + \cdots + A_{n-1}) \\
& + a'_1 \sin. A_1 - a'_2 \sin. (A_1 + A_2) + \cdots \\
& \pm a'_{n-1} \sin. (A_1 + \cdots + A_{n-1}) \\
& + a_1 \cos. A_1 . A'_1 - a_2 \cos. (A_1 + A_2) . (A'_1 + A'_2) + \cdots \\
& \pm a_{n-1} \cos. (A_1 + \cdots + A_{n-1}) . (A'_1 + A'_2 + \cdots + A'_{n-1}), \\
A_1 + \cdots + A_n + A'_1 + \cdots + A'_n = {} & (n-2)\, 180^0,
\end{aligned}$$

oder wenn man die Werthe von $A_1, \ldots, \ldots, a_n$ einführt:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 a_1' + \alpha_2 a_2' + \cdots + \alpha_{n-1} a_{n-1}' - a'_n + \beta_1 A_1' \\ \qquad + \beta_2 A_2' + \cdots + \beta_{n-1} A_{n-1}' = l, \\ \gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_{n-1} a_{n-1}' + \delta_1 A_1' \\ \qquad + \delta_2' A_2' + \cdots + \delta_{n-1} A_{n-1}' = l', \\ A_1' + A_2' \quad + \cdots + A_n' \qquad = m, \end{array}\right\} \quad (a)$$

in welchen Gleichungen freilich $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ durch Bögen, zum Halbmesser 1 gehörig, auszudrücken sind; desgleichen natürlich auch m. Die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind Grössen, die sich aus den obigen Gleichungen leicht ergeben. Neben diesen streng richtigen Bedingungsgleichungen haben wir nun noch die den (6) in §. 3 entsprechenden aufzustellen. Dieselben sind von den Formen $A_1 + A'_1 = A_1, \ldots, a_1 + a'_1 = a_1, \ldots,$ d. h.

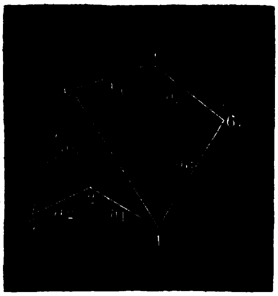
$$\left.\begin{array}{ll} A'_1 = 0, & a'_1 = 0, \\ A'_2 = 0, & a'_2 = 0, \\ \vdots & \vdots \\ A'_n = 0, & a'_n = 0, \end{array}\right\} \quad (b)$$

und es fragt sich nun nur noch, welches Gewicht diesen Gleichungen beizulegen ist. Zu dem Ende muss man auf anderweitigem Wege schon den wahrscheinlichen Fehler kennen, den man bei den Winkel- und Linienmessungen begeht. Dass man dies, wenn man etwa denselben Winkel, oder dieselbe Linie vielmal gemessen hat, aus den Resultaten selbst entnehmen kann, ist nach §. 10 klar. Wir setzen dies also als bekannt voraus. Gesetzt mithin, es sei α der wahrscheinliche Fehler einer einfachen Linienmessung, d. h. einer solchen vom Gewichte 1, wo α natürlich in demselben Längenmaasse ausgedrückt ist, wie $a_1, a_2, \ldots$; sei ferner der wahrscheinliche Fehler einer einfachen Winkelmessung (mit dem betreffenden Instrumente) gleich β Secunden, so wird sich nun das verhältnissmässige Gewicht der einfachen Linien- und Winkelmessung in folgender Weise feststellen lassen.

Es sei das Gewicht der einfachen Linienmessung zur Gewichtseinheit angenommen, so dass also α der wahrscheinliche Fehler der Gewichtseinheit ist. Was die Winkel anbelangt, so

müssen dieselben in allen analytischen Rechnungen als durch zum Halbmesser 1 gehörige Kreisbögen gemessen angesehen werden, und wo in einer Gleichung zusammen Seiten und Winkel (oder deren Functionen) vorkommen, so werden letztere immer mit Seiten multiplicirt sein, damit das Product auch Seiten vorstellen könne. Man wird also die absolute Zahl, welche den messenden Bogen ausdrückt, als mit der Längeneinheit multiplicirt ansehen müssen, wo sie dann eine Länge von derselben Art wie die anderen vorstellt. Der wahrscheinliche Fehler einer solchen Länge ist alsdann $\frac{\beta \pi}{180 \,.\, 60 \,.\, 60}$, welch letztere Grösse den β Secunden messenden Bogen vorstellt. Ist also g das Gewicht einer einfachen Winkelmessung, so ist (§. 3):

Fig. 2.



$$1 : g = \frac{\beta^2 \pi^2}{(180 \,.\, 60 \,.\, 60)^2} : \alpha^2,$$

$$g = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \cdot \left(\frac{180 \,.\, 60 \,.\, 60}{\pi}\right)^2,$$

wodurch nun das verhältnissmässige Gewicht der einfachen Winkelmessung gegeben ist*).

Als Beispiel wollen wir annehmen, es seien in dem Sechsecke Fig. 2 gemessen (Gerling, a. a. O. S. 351):

$A_2 = 240^0\, 12'\, 20''$,	$a_1 = 36{,}42$ Ruthen	Winkel- und Linienmessungen bezüglich von demselben Gewichte.
$A_3 = 48^0\, 22'\, 30''$,	$a_2 = 53{,}60$ „	
$A_5 = 118^0\, 28'\, 30''$,	$a_3 = 70{,}76$ „	
$A_6 = 87^0\, 50'\, 50''$,	$a_4 = 55{,}34$ „	
	$a_5 = 63{,}72$ „	
	$a_6 = 57{,}60$ „	

*) Würden die Bedingungsgleichungen (a) nicht bestehen, so wären $A'_1 = 0, \ldots, a'_1 = 0, \ldots$ offenbar die wahrscheinlichsten Werthe von $A'_1, \ldots, a'_1, \ldots$, so dass dann eine Untersuchung wegen des Gewichts geradezu unnöthig wäre. In so fern aber die (a) bestehen, betrachten wir in ihnen die Grössen α, β, γ, δ kurzweg als absolute Zahlen (Coëfficienten), so dass dann die A', sowie die a' von derselben Art sein müssen, als etwa beides Lineargrössen. Der wahrscheinliche Fehler der ersten ist dann $\frac{\beta \pi}{180 \,.\, 60 \,.\, 60}$, der zweiten α, so dass man das Gesagte wieder erhält.

und es sei der wahrscheinliche Fehler einer Linearmessung = 0,1 Ruthe, einer Winkelmessung 1 Minute, so wird also, wenn 1 das Gewicht der einfachen Linearmessung, das der Winkelmessung $= \frac{0{,}1^2}{60^2} \cdot \left(\frac{180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi}\right)^2 = 0{,}01 \cdot \left(\frac{180 \cdot 60}{\pi}\right)^2$ sein. Sind wieder A_2', A_3', A_5', A_6', a_1', ..., a_6' die an A_2, ..., a_6 anzuhängenden Correctionen, so hat man also

$A_2' = 0$, $A_3' = 0$, $A_5' = 0$, $A_6' = 0$ je mit dem Gewicht

$$0{,}01 \cdot \left(\frac{180 \cdot 60}{\pi}\right)^2,$$

$a_1' = 0$, $a_2' = 0$, ..., $a_6' = 0$ je mit dem Gewicht 1.

Da in den Angaben nur zwei Stücke fehlen, so muss also zwischen denselben eine Bedingungsgleichung bestehen, die man in folgender Weise findet. Man ziehe die Linie 1 4, so wird das Sechseck in zwei Vierecke eingetheilt, in denen je alle Seiten bis auf eine und alle Winkel bis auf die zwei an der fehlenden Seite liegenden gegeben sind. Man kann also nach §. 11 meiner „ebenen Polygonometrie“ die Seite 14 in jedem Vierecke berechnen und wenn man dann die beiden Werthe einander gleich setzt, so hat man die verlangte Bedingungsgleichung. Nun ist im Vierecke 1 2 3 4: Seite 1 4

$$= \sqrt{[a_1 - a_2 \cos. A_2 + a_3 \cos.(A_2 + A_3)]^2 + [a_2 \sin. A_2 - a_3 \sin.(A_2 + A_3)]^2},$$

ferner in 1 4 5 6: Seite 1 4

$$= \sqrt{[a_6 - a_5 \cos. A_6 + a_4 \cos.(A_6 + A_5)]^2 + [a_5 \sin. A_6 - a_4 \cos.(A_6 + A_5)]^2},$$

so dass also

$$\begin{aligned}&[a_1 - a_2 \cos. A_2 + a_3 \cos.(A_2 + A_3)]^2 + [a_2 \sin. A_2 - a_3 \sin.(A_2 + A_3)]^2 \\ = &[a_6 - a_5 \cos. A_6 + a_4 \cos.(A_6 + A_5)]^2 + [a_5 \sin. A_6 - a_4 \cos.(A_6 + A_5)]^2\end{aligned}$$

sein muss, wo für die eintretenden Grössen ihre wahren Werthe zu setzen sind. Löst man die Quadrate auf, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}&a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2 a_1 a_2 \cos. A_2 + 2 a_1 a_3 \cos.(A_2 + A_3) - 2 a_2 a_3 \cos. A_3 \\ = &a_6^2 + a_5^2 + a_4^2 - 2 a_5 a_6 \cos. A_6 + 2 a_6 a_4 \cos.(A_6 + A_5) - 2 a_5 a_4 \cos. A_5.\end{aligned}$$

Setzt man hier $a_1 + a_1'$, ..., $A_5 + A_5'$ für a_1, ..., A_5, wo dann mit a_1, ..., A_5 die oben gegebenen Werthe bezeichnet sind, vernachlässigt die höheren Potenzen und Producte der Correctionen, so ist:

$$
\begin{aligned}
& a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - 2\, a_1\, a_2 \; cos.\; A_2 + 2\, a_1\, a_3 \; cos.\; (A_2 + A_3) \\
& - 2\, a_2\, a_3 \; cos.\; A_3 + 2\, a_1 a_1' + 2\, a_2 a_2' + 2\, a_3 a_3' - 2\, a_1' a_2 \; cos.\; A_2 \\
& - 2\, a_1\, a_2' \; cos.\; A_2 + 2\, a_1\, a_2 \; sin.\; A_2 . A_2' + 2\, a_1'\, a_3 \; cos.\; (A_2 + A_3) \\
& + 2\, a_1\, a_3' \; cos.\; (A_2 + A_3) - 2\, a_1\, a_3 \; sin.\; (A_2 + A_3)\, (A_2' + A_3') \\
& - 2\, a_2' a_3 \; cos.\; A_3 - 2\, a_2\, a_3' \; cos.\; A_3 + 2\, a_2\, a_3 \; sin.\; A_3 \,.\, A_3' \\
= \; & a_6^2 + a_5^2 + a_4^2 - 2\, a_5\, a_6 \; cos.\; A_6 + 2\, a_6\, a_4 \; cos.\; (A_6 + A_5) \\
& - 2\, a_5\, a_4 \; cos.\; A_5 + 2\, a_6 a_6' + 2\, a_5 a_5' + 2\, a_4 a_4' - 2\, a_5' a_6 \; cos.\; A_6 \\
& - 2\, a_5\, a_6' \; cos.\; A_6 + 2\, a_5\, a_6 \; sin.\; A_6 . A_6' + 2\, a_6' a_4 \; cos.\; (A_6 + A_5) \\
& + 2\, a_6 a_4' \; cos.\; (A_6 + A_5) - 2\, a_6 a_4 \; sin.\; (A_6 + A_5)\, (A_6' + A_5') \\
& - 2\, a_5' a_4 \; cos.\; A_5 - 2\, a_5\, a_4' \; cos.\; A_5 + 2\, a_5\, a_4 \; sin.\; A_5 \,.\, A_5'.
\end{aligned}
$$

Hier bedeuten $A_2', \ldots, A_6'$ Bögen zum Halbmesser 1 gehörig. Wollte man diese Grössen in Minuten ausgedrückt erhalten, so hätte man $\frac{A_2' \,.\, \pi}{180 \,.\, 60}, \ldots, \frac{A_6' \,.\, \pi}{180 \,.\, 60}$ dafür zu setzen. Thut man dies und setzt die übrigen Werthe ein, so ergiebt sich:

$$
\begin{aligned}
0 = \; & 3{,}578 - 0{,}000247\, A_2' - 0{,}001744\, A_3' + 0{,}001485\, A_5' \\
& + 0{,}001672\, A_6' - 0{,}09723\, a_1' - 0{,}02805\, a_2' - 0{,}05312\, a_3' \\
& + 0{,}03857\, a_4' + 0{,}09949\, a_5' + 0{,}00634\, a_6'
\end{aligned}
$$

als Bedingungsgleichung. Zugleich muss

$$
a_1^{2\prime} + a_2^{2\prime} + \cdots + a_6^{2\prime} + 0{,}01 . \left(\frac{180.60}{\pi}\right)^2 (A_2^{2\prime} + A_3^{2\prime} + A_5^{2\prime} + A_6^{2\prime})
$$

ein Minimum sein, oder da hier $A_2', \ldots$ in Bogen ausgedrückt sind, es muss, wenn diese Correctionen in Minuten sollen gegeben sein:

$$
a_1^{2\prime} + a_2^{2\prime} + \cdots + a_6^{2\prime} + 0{,}01 \; (A_2^{2\prime} + A_3^{2\prime} + A_5^{2\prime} + A_6^{2\prime})
$$

ein Minimum sein. Fügt man hiezu die mit $2k$ multiplicirte Bedingungsgleichung und differenzirt nach $a_1', \ldots, A_6'$, so erhält man:

$$
\begin{aligned}
a_1' - 0{,}09723\, k &= 0, & 0{,}01\, A_2' - 0{,}000247\, k &= 0, \\
a_2' - 0{,}02805\, k &= 0, & 0{,}01\, A_3' - 0{,}001744\, k &= 0, \\
a_3' - 0{,}05312\, k &= 0, & 0{,}01\, A_5' + 0{,}001485\, k &= 0, \\
a_4' + 0{,}03857\, k &= 0, & 0{,}01\, A_6' + 0{,}001672\, k &= 0. \\
a_5' + 0{,}09949\, k &= 0, \\
a_6' + 0{,}00634\, k &= 0,
\end{aligned}
$$

In Verbindung mit der obigen Bedingungsgleichung folgt hieraus

$$k = 1{,}4142$$

und dann

$$a'_1 = 0{,}138,\quad a'_2 = 0{,}040,\quad a'_3 = 0{,}075,\quad a'_4 = -0{,}045,$$
$$a'_5 = -0{,}141,\quad a'_6 = -0{,}009;$$
$$A'_2 = 0{,}0349' = 2{,}09'',\quad A'_3 = 0{,}2464' = 14{,}78'',$$
$$A'_5 = -0{,}2099' = 12{,}59'',\quad A'_6 = -14{,}18'',$$

so dass also als wahrscheinlichste Werthe zu wählen sind:

$$a_1 = 36{,}558,\quad a_2 = 53{,}640,\quad a_3 = 70{,}835,\quad a_4 = 55{,}285,$$
$$a_5 = 63{,}579,\quad a_6 = 57{,}591,$$
$$A_2 = 240^0\,12'\,22'',\quad A_3 = 48^0\,22'\,45'',\quad A_5 = 118^0\,28'\,17'',$$
$$A_6 = 87^0\,50'\,36''.$$

V. Ermittelung des Absorptions-Coëfficienten von Gasen in Wasser bei verschiedenen Temperaturen.

Bunsen in seiner Abhandlung über das Gesetz der Absorption von Gasen in Wasser (Philosophical Magazine, 1855, p. 116 ff.) giebt für den Absorptionscoëfficienten *) von Methyl-Gas in Wasser folgende Werthe:

bei 4,6	Grad	des	100thl.	Thermometers:	0,072884,
„ 7,8	„	„	„	„	0,064732,
„ 12,1	„	„	„	„	0,055788,
„ 15,2	„	„	„	„	0,050722,
„ 19,8	„	„	„	„	0,045715,
„ 24,2	„	„	„	„	0,040817.

Für irgend welche Temperatur t (innerhalb dieser Gränzen) nimmt er nun die Formel

$$\alpha = a + bt + ct^2$$

an, wo α den Werth des Absorptionscoëfficienten bei t^0 bedeutet. Nach §. 3 ist hier $\alpha = F$, $a = x$, $b = y$, $c = z$, während die dortigen

*) Das Volumen Gas, auf 0° Temperatur und 0,76m barometrischen Druck reducirt, das von der Einheit des Volumens der Flüssigkeit bei demselben Drucke absorbirt wird, heisst der Absorptionscoëfficient.

a alle $= 1$, die $b = t$, die $c = t^2$, alle $g = 1$, so dass also zur Aufstellung der Gleichungen (11) oder (9′) folgende Rechnung nothwendig wird:

$b(=t)$	$c\,(=t^2)$	$F(=\alpha)$	$bc(=t^3)$	$c^2\,(=t^4)$	$bF(=\alpha t)$	$cF(=\alpha t^2)$
4,6	21,16	0,072884	97,336	447,745	0,3352664	1,542225
7,8	60,84	0,064732	474,552	3701,505	0,5049096	3,938294
12,1	146,41	0,055788	1771,561	21435,900	0,6750348	8,167922
15,2	231,04	0,050722	3511,808	53379,500	0,7709745	11,718800
19,8	392,04	0,045715	7762,392	153695,350	0,9051568	17,922110
24,2	585,64	0,040817	14172,488	342974,300	0,9877717	23,904070
83,7	1437,13	0,330658	27790,137	575634,300	4,1791138	67,193421

Hier ist also $[a^2] = 6$, $[ab] = 83{,}7$, $[ac] = 1437{,}13$, $[bc] = 27790{,}137$, $[b^2] = 1437{,}13$, $[c^2] = 575634{,}3$, $[aF] = 0{,}330658$, $[bF] = 4{,}179114$, $[cF] = 67{,}193421$, so dass man zur Bestimmung von x, y, z hat:

$$\begin{aligned}
6x &+ 83{,}7y + 1437{,}13z = 0{,}330658,\\
83{,}7x &+ 1437{,}13y + 27790{,}14z = 0{,}179114,\\
1437{,}13x &+ 27790{,}14y + 575634z = 67{,}19342,
\end{aligned}$$

woraus durch Elimination von x:

$$\begin{aligned}
1617{,}089y + 46453{,}04z &= -\,2{,}601396,\\
46453{,}04y + 1388462{,}8z &= -\,72{,}03308,
\end{aligned}$$

und hieraus:

$$873842z = 43{,}507, \quad z = 0{,}00004979,$$

woraus dann folgt:

$$y = -\,0{,}0030389, \quad x = 0{,}085576,$$

so dass endlich

$$\alpha = 0{,}085576 - 0{,}0030389\,t + 0{,}00004979\,t^2.$$

Berechnet man hiernach die Werthe von α für obige Werthe von t, so erhält man:

t	α (beobachtet).	α (berechnet).	Differenz.	Quadrat.
4,6	0,072884	0,072348	+ 0,000536	0,000000287296
7,8	64732	64911	— 179	32041
12,1	55788	56093	— 305	93025
15,2	50722	50889	— 165	27225
19,8	45715	44925	+ 690	476100
24,2	40817	41192	— 375	140625
				0,000001056312

also ist der wahrscheinliche Fehler der einfachen Beobachtung (§. 10):

$$0{,}6744897 \sqrt{\frac{0{,}000001056312}{6-3}} = 0{,}0004.$$

Von den 6 Differenzen sind 2 über 0,0004, eine (0,000375) nahe daran, die drei anderen darunter, so dass unsere Formel, so weit sich dies bei der geringen Anzahl der Beobachtungen erwarten liess, den theoretischen Anforderungen entspricht.

Anmerkung. Die Formel, die Bunsen a. a. O. S. 129 aufstellt, ist

$$\alpha = 0{,}0871 - 0{,}0033242\, t + 0{,}0000603\, t^2,$$

und ist auf einem wesentlich verschiedenen Wege gefunden worden.

VI. Ueber die näherungsweise Berechnung von $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Poncelet hat bekanntlich gesucht, die Grösse $\sqrt{x^2 + y^2}$ dadurch näherungsweise zu berechnen, dass er sie $= ax + by$ setzte, wobei er a und b für gewisse Gränzen des Verhältnisses $\frac{y}{x}$ bestimmte. (Ich habe hiebei die Darstellung Schefflers im zweiten Bande der „mechanischen Principien u. s. w.“ von Moseley, S. 374 vor Augen.) Diese Bestimmung aber muss genauer mittelst folgender Betrachtungen durchgeführt werden.

Man setze

$$x = r \cos.\varphi, \quad y = r \sin.\varphi,$$

so ist

$$\sqrt{x^2+y^2} = r, \quad ax + by = r(a\, cos.\, \varphi + b\, sin.\, \varphi),$$

so dass also

$$1 = a\, cos.\, \varphi + b\, sin.\, \varphi \qquad (a)$$

sein soll. Da ferner $\frac{y}{x} = tg\, \varphi$, so wird man, wenn die Gränzen des Quotienten $\frac{y}{x}$ gewählt sind, auch die von φ eben dadurch kennen. Gesetzt also, es seien φ_0, φ_1 die Gränzen, innerhalb derer φ schwankt, so sollten eigentlich a und b so bestimmt werden, dass für alle Werthe des Winkels φ, von $\varphi = \varphi_0$ an bis $\varphi = \varphi_1$ die Gleichung (a) richtig wäre. Dies ist aber nun unmöglich, und wir werden uns demnach begnügen müssen, a und b so zu bestimmen, dass die Abweichung möglichst gering sei, d. h. dass so genau als möglich, die Grösse $a\, cos.\, \varphi + b\, sin.\, \varphi$ der Einheit gleich komme. Denkt man sich all die Gleichungen angeschrieben, die aus (a) entstehen, wenn man φ durch unendlich kleine Stufen von φ_0 bis φ_1 wachsen lässt, und bestimmt dann nach den Grundsätzen des §. 3 die Werthe von a und b (dort x und y), so hat man eben dadurch diejenigen Werthe dieser Grössen gefunden, die diesen Gleichungen am besten entsprechen, woraus dann folgt, dass man a und b nach eben jenen Grundsätzen zu bestimmen habe. Bezeichnet man, um in Uebereinstimmung mit §. 3 zu kommen, a und b mit x und y, so hat man also

$$x\, cos.\, \varphi + y\, sin.\, \varphi = 1,$$

wobei φ alle Werthe von φ_0 bis φ_1 annimmt. Zur Bestimmung von x und y hat man dann, gemäss (9'), wenn durch $\Sigma f(\varphi)$ die Summe aller Werthe bezeichnet würde, die $f(\varphi)$ annimmt, wenn φ stetig von φ_0 bis φ_1 geht:

$$x \Sigma\, cos.^2\, \varphi + y \Sigma\, sin.\, \varphi\, cos.\, \varphi = \Sigma\, cos.\, \varphi,$$
$$x \Sigma\, sin.\, \varphi\, cos.\, \varphi + y \Sigma\, sin.^2\, \varphi = \Sigma\, sin.\, \varphi.$$

Multiplicirt man beiderseitig mit der unendlich kleinen Differenz $\Delta \varphi$ und beachtet, dass $\Sigma f(\varphi) \Delta \varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\varphi)\, d\varphi$, so hat man auch:

$$x\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} cos.^2\,\varphi\,d\varphi + y\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} sin.\,\varphi\; cos.\,\varphi\,d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} cos.\,\varphi\,d\varphi,$$

$$x\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} sin.\,\varphi\; cos.\,\varphi\,d\varphi + y\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} sin.^2\,\varphi\,d\varphi = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} sin.\,\varphi\,d\varphi,$$

d. h.

$$x\{cos.(\varphi_1+\varphi_0)\,sin.(\varphi_1-\varphi_0)+\varphi_1-\varphi_0\}+y\,sin.(\varphi_1+\varphi_0)\,sin.(\varphi_1-\varphi_0)$$
$$=4\,cos.\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\,sin.\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2},$$

$$x\,sin.(\varphi_1+\varphi_0)\,sin.(\varphi_1-\varphi_0+y\{\varphi_1-\varphi_0-cos.(\varphi_1+\varphi_0)\,sin.(\varphi_1-\varphi_0)\}$$
$$=4\,sin.\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\,sin.\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2},$$

woraus nun

$$x\;(=a)=\frac{4\;cos.\;\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\;sin.\;\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}}{\varphi_1-\varphi_0+sin.\,(\varphi_1-\varphi_0)},$$

$$y\;(=b)=\frac{4\;sin.\;\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\;sin.\;\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}}{\varphi_1-\varphi_0+sin.\,(\varphi_1-\varphi_0)},$$

wo natürlich für $\varphi_1-\varphi_0$ das analytische Maass (Bogen zum Halbmesser 1) zu setzen ist. Demnach ist endlich, wenn man beachtet, dass $r\;cos.\;\varphi=x,\;\;r\;sin.\;\varphi=y$:

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{4\,sin.\,\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\left\{x\,cos.\,\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}+y\,sin.\,\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\right\}}{\varphi_1-\varphi_0+sin.\,(\varphi_1-\varphi_0)}, \qquad (A)$$

welche Formel allerdings wesentlich abweicht von der, die Poncelet gegeben*).

Setzt man wieder $x=r\;cos.\;\varphi,\;\;y=r\;sin.\;\varphi,$ so ist also näherungsweise:

$$1=\frac{4\,sin.\,\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\left[cos.\,\varphi\,cos.\left(\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\right)+sin.\,\varphi\,sin.\left(\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\right)\right]}{sin.\,(\varphi_1-\varphi_0)+\varphi_1-\varphi_0},$$

und mithin der Fehler =

---

*) Zuerst wurde die Formel (A) aufgestellt von Redtenbacher in dessen „Resultaten für den Maschinenbau" (3. Aufl. S. 102).

$$\frac{4\,sin.\,\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\left[cos.\,\varphi\,cos.\left(\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\right)+sin.\,\varphi\,sin.\left(\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\right)\right]}{sin.\,(\varphi_1-\varphi_0)+\varphi_1-\varphi_0}-1.$$

Diese Grösse wird ein Maximum für

$$-\,sin.\,\varphi\,cos.\left(\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\right)+cos.\,\varphi\,sin.\left(\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2}\right)=0,$$

$$tg\,\varphi=tg\,\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2},\quad \varphi=\frac{\varphi_1+\varphi_0}{2},$$

und ihr Werth ist dann:

$$\frac{4\,sin.\left(\frac{\varphi_1-\varphi_0}{2}\right)}{\varphi_1-\varphi_0+sin.\,(\varphi_1-\varphi_0)}-1=\sqrt{a^2+b^2}-1.$$

Liegt z. B. der Werth von $\frac{y}{x}$ zwischen 0 und 1, so schwankt φ von 0 bis $\frac{\pi}{4}$, also ist dann $\varphi_0=0$, $\varphi_1=\frac{\pi}{4}=45^0$, und also

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{4\,sin.\,22^0\,30'\,[x\,cos.\,22^0\,30'+y\,sin.\,22^0\,30']}{\frac{\pi}{4}+sin.\,45^0}$$

$$=\frac{2\,x\,sin.\,45^0+4\,y\,sin.^2\,22^0\,30'}{\frac{\pi}{4}+sin.\,45^0}.$$

VII. Eine Gerade zu ziehen, die einer krummen Linie möglichst nahe kommt.

Gesetzt in einer Ebene sei eine krumme Linie gezogen, deren Gleichung man kenne. Man soll eine Gerade ziehen, die von $x=a$ bis $x=b$ mit dieser krummen Linie möglichst zusammenfalle.

Sei

$$y=Ax+B$$

die Gleichung der gesuchten Geraden, so müsste, wenn man hier x stetig von a bis b gehen lässt, y nach einander die Werthe annehmen, wie sie der Curve entsprechen, vorausgesetzt, es könnte die Gerade durchweg zusammenfallen mit der Curve. Da dies

nun aber nicht möglich ist, so wird man, wie in Nr. VI, leicht sehen, dass man A und B nach den Grundsätzen des §. 3 zu bestimmen hat. Man erhält so zur Bestimmung von A und B ganz wie vorhin:

$$A\int_a^b x^2 dx + B\int_a^b x dx = \int_a^b xy\, dx,$$

$$A\int_a^b x\, dx + B\int_a^b dx = \int_a^b y\, dx,$$

wo y als Function von x mittelst der Curvengleichung gegeben ist. Daraus folgt:

$$A = \frac{(b-a)\int_a^b xy\, dx - \frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b y\, dx}{(b-a)\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) - \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2} = \frac{\int_a^b xy\, dx - \frac{1}{2}(a+b)\int_a^b y\, dx}{\frac{1}{3}(b^3-a^3)-\frac{1}{4}(a+b)(b^2-a^2)},$$

$$B = \frac{\frac{b^3-a^3}{3}\int_a^b y\, dx - \frac{b^2-a^2}{2}\int_a^b xy\, dx}{(b-a)\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) - \left(\frac{b^2-a^2}{2}\right)^2},$$

wodurch nun die Gleichung der fraglichen Geraden gefunden ist. Sucht man die Fläche, welche zwischen dieser Geraden, den Ordinaten für $x = a$ und $x = b$ und der Abscissenaxe enthalten ist, so ergiebt sich

$$\int_a^b (Ax + B)\, dx = A\frac{b^2-a^2}{2} + B(b-a) = \int_a^b y\, dx,$$

so dass diese Fläche genau ebenso gross ist, als diejenige, welche zwischen der Curve, denselben Ordinaten und der Abscissenaxe enthalten ist.

Es versteht sich von selbst, dass man statt einer Geraden eine parabolische Curve

$$y = A + Bx + Cx^2 + \cdots$$

verlangen könnte, welche dieselbe Eigenschaft des möglichst na-

hen Anschliessens haben sollte. Beschränkt man sich auf die drei ersten Glieder, so hat zur Bestimmung von A, B, C:

$$A\int_a^b dx + B\int_a^b x\,dx + C\int_a^b x^2 dx = \int_a^b y\,dx,$$

$$A\int_a^b x\,dx + B\int_a^b x^2 dx + C\int_a^b x^3 dx = \int_a^b xy\,dx,$$

$$A\int_a^b x^2 dx + B\int_a^b x^3 dx + C\int_a^b x^3 dx = \int_a^b x^2 y\,dx.$$

Da die von der parabolischen Curve, den Ordinaten für $x = a$ und $x = b$, sowie von der Abscissenaxe eingeschlossenen Fläche

$$= \int_a^b (A + Bx + Cx^2)dx = A\int_a^b dx + B\int_a^b x\,dx + C\int_a^b x^2 dx,$$

so ist diese, vermöge der ersten Gleichung $= \int_a^b y\,dx$, wie vorhin.

Da auch

$$\int_a^b (A + Bx + Cx^2)\,x\,dx = \int_a^b xy\,dx,$$

so liegen die Schwerpunkte beider Flächen in derselben Parallelen mit der Axe der y, was auch für den früheren Fall gilt.

Berechnung der Winkel aus den an einem Punkte (Station) gemachten Beobachtungen.

---

§. 16.

Die gemachten Beobachtungen sind entweder lauter Repetitionsbeobachtungen, oder bloss einfache Winkelbeobachtungen, oder theilweise Repetitions- und theilweise einfache Winkelbeobachtungen. Wir wollen deshalb im Folgenden diese verschiedenen Arten behandeln und noch einige Aufgaben beifügen, die, wenn sie auch nicht unmittelbar hierher gehören, doch in nahem Zusammenhang mit dem Behandelten stehen.

I. Repetitionsbeobachtungen.

Die Berechnung hat hier offenbar keine Schwierigkeit, wie aus folgendem Beispiele hervorgeht, das der „Gradmessung von Bessel“ (S. 125) entnommen ist:

Vervielfältigung	$0 : m$	$=$	0°	$0'$	$1,5''$	
	$5 : m_5$	$=$	231	45	18,0	
	$10 : m_{10}$	$=$	103	30	40,25	$(+ 360^\circ)$
	$15 : m_{15}$	$=$	335	16	3,73	$(+ 360^\circ)$
	$20 : m_{20}$	$=$	207	1	26,25	$(+ 720^\circ)$, (§. 14)

woraus nun nach den Formeln zu Ende des §. 14 der Winkel berechnet wird. Um aber die Rechnung etwas zu vereinfachen, wollen wir für x zuerst den Näherungswerth $x_1 =$

$\frac{207^0\,1'\,26{,}25'' + 720^0}{20} = 46^0\,21'\,4''$ wählen und setzen $x = x_1 + x'$, so ist

$$m_{20} - m = 20\,x_1 + 4{,}75'', \quad m_{15} - m_5 = 10\,x_1 + 5{,}75'',$$

mithin (§. 14)

$$x_1 + x' = \frac{4\,(20\,x_1 + 4{,}75'') + 10\,x_1 + 5{,}75''}{90},$$

$$x' = \frac{90\,x_1 + 4\,.\,4{,}75'' + 5{,}75''}{90} - x_1 = 0{,}275'',$$

$$x = x_1 + x' = 46^0\,21'\,4{,}275'',$$

mit dem Gewichte 11,669.

Hat man für denselben Winkel mehrere solcher Repetitionsreihen, so berechnet man aus jeder in derselben Weise den Winkel, nebst dem Gewichte. Hat man so gefunden für den Winkel die Werthe a_1 mit dem Gewichte g_1, a_2 mit dem Gewichte $g_2, \ldots, a_n$ mit dem Gewichte g_n, so ist der wahrscheinlichste Werth desselben (§. 4, 8):

$$\frac{g_1 a_1 + g_2 a_2 + \cdots + g_n a_n}{g_1 + g_2 + \cdots + g_n}, \text{ mit dem Gewichte } g_1 + g_2 + \cdots + g_n.$$

Nimmt man, wie dies z. B. Gerling („Ausgleichungsrechnungen der praktischen Geometrie") immer thut, die Gewichte den Repetitionszahlen proportional, so kann man geradezu diese Zahlen als Gewichte setzen (§. 5).

Eine hierher passende Aufgabe entnehmen wir dem eben angeführten Werke S. 73. Gesetzt nämlich, es sei der Winkel x mit einem Theodoliten, dessen wahrscheinlicher Fehler (§. 12, 4) bei einfacher Messung $4''$ sei, durch 25fache Repetition $= 36^0\,48'\,44{,}12''$ gefunden; der Winkel y mittelst 30facher Repetition und eines Theodoliten vom wahrscheinlichen Fehler $9''$ gleich $48^0\,17'\,36{,}47''$, so ist der wahrscheinliche Fehler von $u = x + y$ zu ermitteln, dabei die Gewichte den Repetitionszahlen proportional gesetzt. Wie bereits in §. 11, Nr. 4

Fig. 3.

gezeigt, ist der einfachen Beobachtung mit dem zweiten Theodoliten nur das Gewicht $\left(\frac{4}{9}\right)^2$ beizulegen, wenn das der einfachen Beobachtung mit dem ersten gleich 1 ist. Dies vorausgesetzt hat man also:

$$x = 36^0\,48'\,44{,}12'' \text{ mit dem Gewichte } 25,$$

also wahrscheinlicher Fehler $\frac{4''}{\sqrt{25}}$,

$$y = 48^0\,17'\,36{,}47'' \text{ mit dem Gewichte } 30\,.\left(\frac{4}{9}\right)^2,$$

also wahrscheinlicher Fehler $\frac{4''}{\frac{4}{9}\sqrt{30}} = \frac{9''}{\sqrt{30}}$,

also $u = x + y = 85^0\,6'\,20{,}59''$ mit dem wahrscheinlichen Fehler $\sqrt{\frac{16}{25} + \frac{81}{30}} = 1{,}828''$, also das Gewicht von u: $\left(\frac{4}{1{,}828}\right)^2 = 4{,}788$, so dass es also genügt hätte, mittelst des ersten Theodoliten den ganzen Winkel u etwa 5mal zu repetiren, um ihn ebenso genau zu finden, wie durch seine beiden Theile. (Man vergl. §. 6, II, §. 3.)

II. Einfache Winkel- oder Richtungsbeobachtungen.

Im Vorstehenden haben wir bloss Repetitionsbeobachtungen betrachtet, und haben nun diejenigen Beobachtungen näher zu untersuchen, bei denen blosse Winkel- oder Richtungsbeobachtungen vorkommen. Dabei nimmt man eine Richtung als die erste an, und beobachtet durch einfache Einstellung und Ablesung der Winkel, den irgend eine andere, in demselben Punkte zu beobachtende Richtung mit der ersten macht. Die Beobachtungen selbst stellte Bessel z. B. („Gradmessung“ S. 69) in folgender Weise an: Der getheilte Kreis des Instruments wurde festgeklemmt, die Drehaxe der Alhidade senkrecht gestellt, das Fernrohr auf einen der zu beobachtenden Punkte gerichtet und die Angabe der vier Nonien abgelesen. Die Einstellung und Ablesung wurde bei allen noch zu beobachtenden Punkten gleichfalls vorgenommen. Dasselbe ging nun in umgekehrter Ord-

nung vor sich, worauf man aus beiden Resultaten das Mittel nahm. Weitere vier Beobachtungsreihen wurden so vorgenommen, indem man den Anfangspunkt der Theilungen um etwa 15^0, und dann wieder um dieselbe Grösse verschob. Endlich wurde das Fernrohr umgelegt, die Alhidade um $180^0 + 15^0$ gedreht, und in gleicher Weise sechs Beobachtungsreihen angestellt. Wurde man durch Nacht oder andere Umstände verhindert, so wurde das Fehlende ergänzt. Dass man dadurch etwaigen Fehlern der Theilung ihre Einwirkung auf das Resultat entziehen wollte, ist klar. Ein jedes solcher Art erhaltene Resultat wurde von demselben Gewichte angenommen.

Um die Frage vollkommen allgemein zu behandeln, wollen wir annehmen, es seien A, B, C, ... die wahren Werthe der Winkel, welche die auf einander folgenden Richtungen mit der ersten machen (diese Winkel alle in derselben Richtung von 0^0 bis 360^0 gezählt), x der Fehler, der begangen wird, wenn man die erste Richtung für 0 annimmt*) (ein Fehler, der so zu verstehen ist, dass die wahre Richtung 0 um x weiter zurückliegt); seien ferner a, b, c, ... die gemachten Ablesungen für die Winkel A, B, C, ... bei einer ersten Beobachtungsreihe und g_0, g_1, g_2, g_3, ... die Gewichte von 0, a, b, c, ...; x', a', b', c',..., g_0', g_1', g_2', g_3', ... seien analoge Grössen für eine zweite Beobachtungsreihe u. s. w., so muss also (§. 3) die Summe:

$$\begin{aligned}
& g_0 x^2 + g_1(x + A - a)^2 + g_2(x + B - b)^2 \\
& \qquad + g_3(x + C - c)^2 + \cdots \\
+ & g'_0 x'^2 + g'_1(x' + A - a')^2 + g'_2(x' + B - b')^2 \\
& \qquad + g'_3(x' + C - c')^2 + \cdots \\
+ & g''_0 x''^2 + g''_1(x'' + A - a'')^2 + g''_2(x'' + B - b'')^2 \\
& \qquad + g''_3(x'' + C - c'')^2 + \cdots \\
+ & \cdots
\end{aligned}$$

ein Minimum sein. Differenzirt man also nach x, x', x'', ..., A, B, C, ..., so ergiebt sich:

---

*) Es ist ganz wohl möglich, dass die erste Richtung nicht 0 abgelesen wird. Allein dieser Fall lässt sich immer auf den angenommenen zurückführen, indem man die Ablesung der ersten Richtung von den anderen Ablesungen subtrahirt.

$$\left.\begin{aligned}
&(g_0 + g_1 + g_2 + \cdots) x + g_1 A + g_2 B + g_3 C + \cdots \\
&\qquad = g_1 a + g_2 b + g_3 c + \cdots, \\
&(g_0' + g_1' + g_2' + \cdots) x' + g_1' A + g_2' B + g_3' C + \cdots \\
&\qquad = g_1' a' + g_2' b' + g_3' c' + \cdots, \\
&\qquad\quad \vdots \\
&(g_1 + g_1' + g_1'' + \cdots) A + g_1 x + g_1' x' + g_1'' x'' + \cdots \\
&\qquad = g_1 a + g_1' a' + g_1'' a'' + \cdots, \\
&(g_2 + g_2' + g_2'' + \cdots) B + g_2 x + g_2' x' + g_2'' x'' + \cdots \\
&\qquad = g_2 b + g_2' b' + g_2'' b'' + \cdots, \\
&\qquad\quad \vdots
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Kommen einige Richtungsbeobachtungen in der betreffenden Reihe nicht vor, so setze man das zugehörige g nur Null und die Formeln (34) gelten auch dann noch.

Aus den ersten Gleichungen (34) ziehe man $x, x', \ldots$ und setze diese Grössen in die zweiten, so erhält man zur Bestimmung von $A, B, C, \ldots$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
pA + p'B + p''C + \cdots &= m, \\
qA + q'B + q''C + \cdots &= m', \\
rA + r'B + r''C + \cdots &= m'', \\
\vdots\quad&
\end{aligned}\right\} \quad (35)$$

in denen $p, p', \ldots, q, q', \ldots, m, m', \ldots$ bestimmte Grössen sind, für welche übrigens das eigenthümliche Bildungsgesetz der Coëfficienten in §. 3 wieder obwaltet, dass nämlich $p' = q$, $p'' = r, \ldots, q'' = r'$, u. s. w.

Bei diesen Rechnungen ist übrigens eine Abkürzung immer zulässig. Man wähle nämlich für $A, B, C, \ldots$ die angenäherten Werthe $A_1, B_1, C_1, \ldots$ und setze

$$A = A_1 + A', \quad B = B_1 + B', \quad C = C_1 + C', \ldots,$$

wo also $A', B', C', \ldots$ die an $A_1, B_1, C_1, \ldots$ noch anzubringenden Correctionen sind, so ist leicht zu sehen, dass man die neuen Gleichungen, die zur Bestimmung von $x, x', \ldots, A', B', \ldots$ dienen, aus (34) erhält, wenn man dort setzt statt

$$\begin{aligned}
&a\colon a - A_1,\ b\colon b - B_1,\ c\colon c - C_1, \ldots; \\
&a'\colon a' - A_1,\ b'\colon b' - B_1,\ c'\colon c' - C_1, \ldots; \\
&\qquad\qquad \vdots
\end{aligned} \quad A\colon A',\ B\colon B',\ C\colon C', \ldots.$$

Daraus folgt, dass die Gleichungen zur Bestimmung von A', B', C', ... die (35) sein werden, wenn p, p', ..., q, q',... dieselben Werthe, wie in (35) beibehalten, m, m', m'', ... dagegen andere annehmen und statt A, B, C, ... gesetzt wird A', B', C', ...

Zwei Beispiele mögen die Theorie erläutern.

Das erste betrifft die Beobachtungen Bessel's auf der Station Trenck, die bereits in arithmetische Mittel vereinigt wurden.

Mednicken.	Fuchsberg.	Wargelitten.	Galtgarben.	Anzahl der Beob.
0° 0′ 0,000″	83° 30′ 34,752″	287° 14′ 12,833″	346° 24′ 16,333″	9
0,	34,762	15,126		6
0,	35,416		19,293	3

Näherungsweise: A_1 (Med.-Trenck-Fuchsberg) $= 83^0\,30'\,34''$, B_1 (M. T. W.) $287^0\,14'\,12''$, C_1 (M. T. G.) $= 346^0\,24'\,18''$; $g_0 = g_1 = g_2 = g_3 = 9$, $g_0' = g_1' = g_2' = 6$, $g_3' = 0$, $g_0'' = g_1'' = g_3'' = 3$, $g_2'' = 0$;
$a - A_1 = 0{,}752$, $b - B_1 = 0{,}833$, $c - C_1 = 0{,}333$; $a' - A_1 = 0{,}762$, $b' - B_1 = 3{,}126$; $a'' - A_1 = 1{,}416$, $c'' - C_1 = 1{,}293$.
Also die (34):

$$36x + 9A' + 9B' + 9C' = 17{,}262,\quad 18A' + 9x + 6x' + 3x'' = 15{,}588,$$
$$18x' + 6A' + 6B' = 23{,}328,\quad 15B' + 9x + 6x' = 26{,}253,$$
$$9x'' + 3A' + 3C' = 8{,}127,\quad 12C' + 9x + 3x'' = 6{,}876,$$

woraus

$$\begin{aligned} 12{,}75A' - 4{,}25B' - 3{,}25C' &= 0{,}788, & A' &= 0{,}866,\\ -4{,}25A' + 10{,}75B' - 2{,}25C' &= 14{,}162, & B' &= 1{,}822,\\ -3{,}25A' - 2{,}25B' + 8{,}75C' &= -0{,}148, & C' &= 0{,}773,\end{aligned}$$

also wahrscheinlichste Werthe: Mednicken $0^0\,0'\,0{,}000''$, Fuchsberg $83^0\,30'\,34{,}866''$, Wargelitten $287^0\,14'\,13{,}822''$, Galtgarben $346^0\,24'\,18{,}773''$.

Wegen späterer Rechnung ist zu bemerken, dass die Gleichungen (35) genau in der vorgeschriebenen Weise müssen aus (34) gebildet werden und Abkürzungen, Zeichenwechseln u. dgl. dabei nicht gestattet sind.

Das zweite Beispiel wählen wir aus Bayer („Küstenvermessung“ S. 191); es betrifft die Beobachtungen in Buchholz, die wir sogleich zu arithmetischen Mitteln vereinigt haben. Wir wählen dieses Beispiel um so lieber, als die Anfangsrichtung nicht immer dieselbe ist.

Luckow.	Künkendorf.	Templin.	Anzahl der Beob.
0° 0′ 0,00″	71° 48′ 55,30″	156° 17′ 47,58″	8
0,		48,25	2
	0 0 0,00	84 28 51,31	4
0,	71 48 51,40		1
	0 0 0,00	84 28 50,61	7
0,	71 48 57,17	156 17 46,98	8
0,	57,75		4

Näherungsweise A_1 (L. B. K.) $= 71^0 48' 55''$, B_1 (L. B. T.) $= 156^0 17' 48''$; wahre Werthe dieser Winkel: $A_1 + A'$, $B_1 + B'$, so dass wenn Künkendorf die Anfangsrichtung ist, der wahre Werth von K. B. T. ist $B_1 + B' - (A_1 + A')$. Sind dann $x, x_1, \ldots, x_6$ die Verbesserungen der sieben Anfangsrichtungen, so muss

$$8x^2 + 2x_1{}^2 + 4x_2{}^2 + x_3{}^2 + 7x_4{}^2 + 8x_5{}^2 + 4x_6{}^2 + 8(x + A' - 0{,}30)^2 + 8(x + B' + 0{,}41)^2 + 2(x_1 + B' - 0{,}25)^2 + 4(x_2 + B' - A' + 1{,}68)^2 + (x_3 + A' + 3{,}60)^2 + 7(x_4 + B' - A' + 2{,}39)^2 + 8(x_5 + A' - 2{,}17)^2 + 8(x_5 + B' + 1{,}01)^2 + 4(x_6 + A' - 2{,}75)^2$$

ein Minimum sein. Daraus folgt, wenn man nach $x, x_1 \ldots, x_6$, A', B' differenzirt:

$$\begin{aligned}
3x + A' + B' &= -0{,}11,\\
2x_1 + B' &= 0{,}25,\\
2x_2 + B' - A' &= -1{,}68,\\
2x_3 + A' &= -3{,}60,\\
2x_4 + B' - A' &= -2{,}39,\\
3x_5 + A' + B' &= 1{,}16,\\
2x_6 + A' &= 2{,}75,
\end{aligned}$$

$$8x - 4x_2 + x_3 - 7x_4 + 8x_5 + 4x_6 + 32A' - 11B' = 50{,}61,$$
$$8x + 2x_1 + 4x_2 + 7x_4 + 8x_5 - 11A' + 29B' = -34{,}31,$$

woraus

$$18{,}66\,A' - 10{,}83\,B' = \quad 32{,}38,$$
$$-\,10{,}83\,A' + 17{,}18\,B' = -\,25{,}64,$$
$$A' = 1{,}37, \quad B' = -\,0{,}63;$$
$$A = 71^0\,48'\,56{,}37'', \quad B = 156^0\,17'\,47{,}37''.$$

III. Richtungs- und Repetitionsbeobachtungen.

Hat man auf derselben Station beiderlei Arten von Winkelbeobachtungen, so wird man für die Rechnung die einen in die anderen verwandeln, also alle zu Richtungsbeobachtungen, oder alle zu Repetitionsbeobachtungen umformen. Dabei hat man auf das betreffende Gewicht wohl zu achten. Legen wir die Theorie des §. 14 zu Grunde, so ist $\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$ das Gewicht der einfachen Richtungsbeobachtung, während das des repetirten Winkels nach den dortigen Formeln sich ergiebt.

Im Bessel'schen Falle war das erstere also $\frac{1}{4{,}2052} = 0{,}2378$.

Setzt man die Gewichte der repetirten Winkel den Repetitionszahlen proportional (§. 5 u. 14), so wird (§. 14) β^2 vernachlässigt; alsdann ist das Gewicht der Richtungsbeobachtung $= \frac{1}{\alpha^2}$, und das des $n$mal repetirten Winkels $\frac{n}{2\,\alpha^2}$. Daraus folgt, dass wenn das Gewicht den Repetitionszahlen gleich gesetzt wird, das der einfachen Richtungsbeobachtung $= 2$ zu setzen ist, da $\frac{n}{2} \cdot 2 = n$ ist*).

Als Beispiel zur Erläuterung wählen wir die Bessel'schen Beobachtungen auf der Station Gilge („Gradmessung“ S. 125). Die einfachen Beobachtungen sind 6 an der Zahl, die in ein

*) Wirklich ergiebt sich daraus dann das Gewicht des einmal gemessenen Winkels $= 1$. Denn letzterer ist die Differenz zweier Richtungsbeobachtungen, von denen jede das Gewicht 2 hat, so dass unter Zuziehung von §. 6, III. das Gewicht der Differenz $= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}} \doteq 1$ ist.

arithmetisches Mittel vom Gewichte $6 . 0,2378 = 1,4268$ vereinigt wurden (§. 8). Die Gewichte der repetirten Winkel ergeben sich nach der Tabelle am Schlusse des §. 14. So hat man:

Beobachtungen in Gilge.

Winkel	Legitten	Gilge	Lattenwalde: $71^0 22' 57,7809''$ (Gew. 22,582),
„	Lattenwalde	„	Nidden: $46^0 21' 3,986''$ (Gew. 19,819),
„	Nidden	„	Kallenincken: $43^0 16' 54,1343''$ (Gew. 18,206),
„	Lattenwalde	„	Kallenincken: $89^0 37' 57,600''$ (Gew. 1,783).

Richtung	Legitten:	$0^0\ 0'\ 0,0000''$	(Gew. 1,4268),
„	Lattenwalde:	71 22 56,0417	(„ „),
„	Kallenincken:	161 0 50,6250	(„ „).

Setzt man den Winkel Leg. G. Lat. $= A = 71^0\, 22' 57,7'' + A'$, Leg. G. N. $= B = 117^0 44' 1,7'' + B'$, Leg. G. K. $= C = 161^0\, 0' 55,8'' + C'$, so hat man, wenn Alles auf Richtungsbeobachtungen zu reduciren ist, nach II.:

$x = 0$ (Gew. 1,4268), $x + A = 71^0 22' 56,0417''$ (Gew. 1,4268), $x + C = 161^0\ 0'\ 50,625''$ (Gew. 1,4268), $A = 71^0\ 22'\ 57,7809''$ (Gew. 22,582), $B - A = 46^0 21' 3,986''$ (Gew. 19,819), $C - B = 43^0 16' 54,1343''$ (Gew. 18,206), $C - A = 89^0 37' 57,6''$ (Gew. 1,783),

oder, wenn man obige Werthe für A, B, C einführt, so muss nach §. 3 die Grösse

$$1,4268\, x^2 + 1,4268\, (x + A' + 1,6583)^2 + 1,4268\, (x + C' + 5,175)^2 + 22,582\, (A' - 0,0809)^2 + 19,819\, (B' - A' + 0,014)^2 + 18,206\, (- B' + C' - 0,034)^2 + 1,783\, (C' - A' + 0,5)^2$$

ein Minimum sein, woraus durch Differentiation nach x, A', B', C':

$$\begin{aligned}
45,611\, A' - 19,819\, B' - 1,783\, C' + 1,4268\, x &= 0,628,\\
- 19,819\, A' + 38,025\, B' - 18,206\, C' &= - 0,901,\\
- 1,783\, A' - 18,206\, B' + 21,416\, C' + 1,4268\, x &= - 7,652,\\
1,4268\, A' + 1,4268\, B' + 4,2804\, x &= - 9,753,
\end{aligned}$$

wodurch:

$$
\begin{aligned}
45{,}135\,A' - 19{,}819\,B' - 2{,}258\,C' &= 3{,}879,\\
-19{,}819\,A' + 38{,}025\,B' - 18{,}206\,C' &= -0{,}901,\\
-2{,}258\,A' - 18{,}206\,B' + 20{,}940\,C' &= -4{,}401,
\end{aligned}
$$

$$A' = -0{,}052, \quad B' = -0{,}265, \quad C = -0{,}447;$$

$$A = 71^0\,22'\,57{,}648'', \quad B = 117^0\,44'\,1{,}435'', \quad C = 161^0\,0'\,55{,}353''.$$

Uebrigens ist die Rechnung dieselbe, wenn man Alles zu Repetitionsbeobachtungen umändern will, da man schliesslich immerhin A, B, C erhält.

IV. Zusatz, betreffend die Vereinigung von Repetitionsbeobachtungen mit verschiedenen Instrumenten.

Bei der Theorie der Repetitionsbeobachtungen in §. 14 wurde diejenige Beobachtung zur Gewichtseinheit genommen, deren wahrscheinlicher Fehler $= 1$ (eine Secunde) war, und darnach dann theoretisch die Gewichte der einzelnen Repetitionsbeobachtungen ermittelt. Unter Voraussetzung der so erhaltenen Gewichte kann man aber nun nach §. 10 aus den gemachten Beobachtungen den wahrscheinlichen Fehler einer Beobachtung vom Gewichte 1 ermitteln. Fällt derselbe $= 1$ aus, so ist dies ein Zeichen, dass die theoretisch gemachten Annahmen eintreffen, dass also namentlich das Verhältniss $\frac{\alpha^2}{\beta^2}$ richtig angenommen ist; fällt aber der wahrscheinliche Fehler nicht $= 1$ aus, so müsste entweder dieses Verhältniss geändert werden, was immerhin sehr misslich ist, oder aber man müsste derjenigen Beobachtung, deren Gewicht 1 war, jetzt ein ihrem wahrscheinlichen Fehler entsprechendes Gewicht beilegen. Ist nämlich ϱ der gefundene wahrscheinliche Fehler der Beobachtung vom Gewichte 1, so wäre das Gewicht der letzteren, statt 1, jetzt nur $\frac{1}{\varrho^2}$ zu setzen, so dass die nach §. 14 theoretisch bestimmten Gewichte alle mit $\frac{1}{\varrho^2}$ zu multipliciren wären. Da dies aber an dem gegenseitigen Verhalten nichts ändert, so kann man getrost bei den theoretisch angegebenen Gewichten bleiben. — Anders aber verhält sich die

Sache für zweierlei Theodoliten. Findet man nämlich für den ersten den wahrscheinlichen Fehler der Beobachtung vom Gewichte 1 gleich ϱ, für den zweiten gleich ϱ', so wären für den ersten die in der Tabelle am Schlusse des §. 14 angegebenen Gewichte mit $\frac{1}{\varrho^2}$, für den zweiten mit $\frac{1}{\varrho'^2}$ zu multipliciren; oder wenn man immerhin die Beobachtung vom wahrscheinlichen Fehler ϱ des ersten Theodoliten als Gewichtseinheit beibehält, also die Tabelle des §. 14 für ihn gelten lässt, so muss man die Gewichte jener Tabelle, in so fern sie für den zweiten Theodoliten gelten soll, mit $\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^2$ multipliciren.

So erhielt Bessel („Gradmessung" S. 137) für den ersten Theodoliten 0,6745 . 1,3056, für den zweiten 0,6745 . 2,8 als wahrscheinliche Fehler der Beobachtung vom Gewichte 1, so dass also, unter der Annahme die Tabelle des §. 14 gelte für den ersten Theodoliten, die in ihr angegebenen Gewichte mit $\left(\frac{0,6745\,.\,1,3056}{0,6745\,.\,2,8}\right)^2 = 0,2178$ zu multipliciren sind, wenn sie auch für den zweiten Theodoliten gelten soll.

Nimmt man die Gewichte den Repetitionszahlen proportional, und ist dann n das Gewicht des durch $n$fache Repetition (Ablesen nur zu Anfang und Ende) mittelst des ersten Theodoliten gefundenen Winkels so ist $n\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^2$ das durch $n$fache Repetition mittelst des zweiten gefundenen, wo ϱ und ϱ' dieselbe Bedeutung haben, wie so eben. (Vergl. §. 11, Nro. 4.)

Gesammtausgleichung der Winkel in einem geodätischen Dreiecksnetze.

I. Ansatz der Bedingungsgleichungen.

§. 17.

Berechnet man nun auch nach den in §. 16 angegebenen Methoden die einzelnen Winkel, die in einem Dreiecksnetze vorkommen, so könnte es sich ganz wohl ereignen, dass das so erhaltene Netz keineswegs dem wirklichen entspräche, ja dass Seiten, in verschiedener Weise berechnet, auch verschieden erhalten würden. Die erhaltenen wahrscheinlichsten Werthe der Winkel an einer Station sind noch keineswegs die wahrscheinlichsten Werthe dieser Winkel, in so fern sie Theile des ganzen Netzes sind. Es müssen diese Winkel nämlich noch einer Reihe mathematischer Bedingungen genügen, die in Gleichungen ausgedrückt, eben die sogenannten Bedingungsgleichungen bilden. Die Bildung dieser Bedingungsgleichungen soll uns nun zunächst beschäftigen. In dieselben treten bloss die Winkel ein, so dass aus den gegebenen Richtungen, im Falle Richtungsbeobachtungen vorliegen, dieselben berechnet werden müssen, was offenbar durch einfache Subtraction der wahrscheinlichsten Werthe der Richtungen geschieht.

Die nach den Vorschriften des vorigen Paragraphen berechneten Werthe der Winkel werden wir nun als genäherte Werthe ansehen und denselben Correctionen beilegen, die sodann nach Anleitung des Früheren zu berechnen sein werden. Dabei müssen wir jedoch unterscheiden, ob man bloss Winkel- (Repe-

titions-) Beobachtungen, oder bloss Richtungsbeobachtungen hat. Den gemischten Fall werden wir nicht mehr erörtern, da er nach §. 16, III. als auf einen der beiden anderen zurückgeführt angesehen werden kann. Ist A ein Winkel, dessen genäherter Werth A_1 ist, so komme ihm im ganzen Netze die Correction $\varDelta A$ zu, welche wir mit einem einzigen Zeichen zu bezeichnen haben werden, wenn Repetitionsbeobachtungen vorliegen; hat man dagegen Richtungsbeobachtungen, so sind dazu in der Regel zwei Zeichen nothwendig. Man hat nämlich nach den Vorschriften des §. 16 zunächst die genäherten Werthe der einzelnen Richtungen berechnet; legt man denselben nun gewisse (noch zu bestimmende) Correctionen bei, die Bessel und Bayer fortlaufend durch das ganze Netz mit (1), (2), . . . bezeichnen, wo die Anfangsrichtungen einer solchen Bezeichnung nicht bedürfen werden, so wird die Correction eines Winkels durch die Differenz zweier solcher Richtungscorrectionen auszudrücken sein. So wäre (s. Fig. 1), wenn MA die Anfangsrichtung, die Richtungen MB, MC, . . . die genäherten Werthe a, b, . . . haben, mit den Correctionen (3), (4), . . ., der wahre Werth des Winkels CMB gleich $b-a + (4) - (3)$ u. s. w. Einstweilen mag es genügen, die Correctionen der Winkel mit $\varDelta A$, $\varDelta B$, . . . zu bezeichnen, unbekümmert darum, ob diese Grössen durch ein oder zwei Zeichen auszudrücken sind.

Drei Arten von Bedingungsgleichungen.

Die erste Art der Bedingungsgleichungen hat dann Statt, wenn sämmtliche Winkel um einen Punkt herum beobachtet worden sind. Seien A, B, . . ., E die genäherten Werthe derselben (gefunden nach den Vorschriften des §. 16), $\varDelta A$, $\varDelta B$, . . ., $\varDelta E$ ihre Correctionen im ganzen Netze, so muss also

$$\left.\begin{aligned} A+B+\cdots+E+\varDelta A+\varDelta B+\cdots+\varDelta E&=360^0,\\ \varDelta A+\varDelta B+\cdots+\varDelta E&=360^0-(A+B+\cdots+E)\end{aligned}\right\}\quad(36)$$

sein. So viele Male im ganzen Netze sämmtliche Winkel um einen Punkt herum gemessen worden, so viele Bedingungsgleichungen der Form (36) hat man, die also sehr leicht anzusetzen sind.

Die zweite Art Bedingungsgleichungen, welche wir die **Winkelgleichungen** nennen können, entsteht daher, dass die Summe der drei Winkel eines jeden Dreiecks eine bestimmte ist (vergl. meine „ebene und sphärische Trigonometrie" S. 326). Sind A, B, C die genäherten Werthe der drei Winkel des geodätischen Dreiecks, ε der sphärische Excess, so ist

$$A+B+C+\varDelta A+\varDelta B+\varDelta C=180^{\circ}+\varepsilon,$$
$$\varDelta A+\varDelta B+\varDelta C=180^{\circ}+\varepsilon-(A+B+C). \quad (37)$$

Wählen wir aus **Bessel's** „Gradmessung etc." S. 143 das Dreieck Fuchsberg-Wargelitten-Haferberg, in dem der sphärische Excess 0,163″ ist. Man hat dort:

Winkel an Fuchsberg:	73° 11′ 36,248″	$-(10)$,
„ „ Wargelitten:	78 2 17,900	$+(13)$,
„ „ Haferberg:	28 46 7,773	$+(16)-(19)$,
	180 0 1,921,	

also

$$180^{\circ}\,0'\,1{,}921''+(16)+(13)-(10)-(19)=180^{\circ}\,0'\,0{,}163'',$$
$$(16)+(13)-(10)-(19)=-1{,}758,$$

wenn die Correctionen in Secunden ausgedrückt sind.

Ein zweites Beispiel entlehnen wir der hessischen Gradmessung (**Fischer**, höhere Geodäsie, III. S. 61), wobei es sich um das Dreieck Mannheim-Melibocus-Donnersberg handelt. Die Beobachtungen ergeben:

Winkel an Mannheim:	93° 48′ 15,22″	$+\varDelta A$,
„ „ Melibocus:	51 55 00,18	$+\varDelta B$,
„ „ Donnersberg:	34 16 49,72	$+\varDelta C$,
	180 0 5,12;	

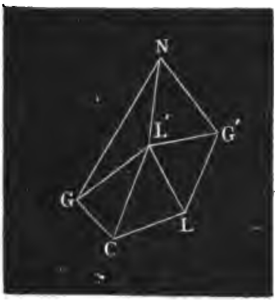
der sphärische Excess des Dreiecks war 3,054″, so dass

$$180^{\circ}\,0'\,5{,}12''+\varDelta A+\varDelta B+\varDelta C=180^{\circ}\,0'\,3{,}054'',$$
$$\varDelta A+\varDelta B+\varDelta C=-1{,}066.$$

Die dritte Art von Bedingungsgleichungen, die wir **Seitengleichungen** heissen können, entsteht daher, dass jede Seite des Netzes, wie immer sie auch berechnet werden mag, von derselben Grösse erhalten werden muss. Die Behandlungsweise dieser Gattung wird uns das folgende Beispiel erläutern (Fig. 4, a. f. S.).

In den um den Punkt L' herumliegenden Dreiecken, in denen sämmtliche Winkel gemessen wurden, hat man folgende Gleichungen:

Fig. 4.



$$\frac{sin.\ L'G}{sin.\ L'C} = \frac{sin.\ L'CG}{sin.\ L'GC},$$
$$\frac{sin.\ L'C}{sin.\ L'L} = \frac{sin.\ L'LC}{sin.\ L'CL},$$
$$\frac{sin.\ L'L}{sin.\ L'G'} = \frac{sin.\ L'G'L}{sin.\ L'LG'},$$
$$\frac{sin.\ L'G'}{sin.\ L'N} = \frac{sin.\ L'NG'}{sin.\ L'G'N},$$
$$\frac{sin.\ L'N}{sin.\ L'G} = \frac{sin.\ L'GN}{sin.\ L'NG},$$

worin natürlich die Winkel mit ihren wahren Werthen zu nehmen sind. Multiplicirt man alle diese Gleichungen, so erhält man:

$$1 = \frac{sin.\ L'GC\ sin.\ L'CL\ sin.\ L'LG'\ sin.\ L'G'N\ sin.\ L'NG}{sin.\ L'CG\ sin.\ L'LC\ sin.\ L'G'L\ sin.\ L'NG'\ sin.\ L'GN}, \qquad (a)$$

unter welcher Form diese Seitengleichungen immer erscheinen. Sind nun A, B, C, ... die genäherten Werthe der Winkel, deren Sinus im Zähler erscheinen, während A', B', C', ... dieselben Grössen für den Nenner sind; ΔA, ΔB, ΔC, ...; $\Delta A'$, $\Delta B'$, $\Delta C'$, ... ihre Correctionen im ganzen Netz, so hat man also:

$$1 = \frac{sin.\ (A + \Delta A)\ sin.\ (B + \Delta B)\ sin.\ (C + \Delta C) \ldots}{sin.\ (A' + \Delta A')\ sin.\ (B' + \Delta B')\ sin.\ (C' + \Delta C') \ldots}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} &log.\ sin.\ (A + \Delta A) + log.\ sin.\ (B + \Delta B) + \cdots \\ &- log.\ sin.\ (A' + \Delta A') - log.\ sin.\ (B' + \Delta B') - \cdots = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man allgemein die logarithmische Differenz für $1''$ bei $sin.\ x$ mit $D\ log.\ sin.\ x$; sind ferner, wie überall, ΔA, ΔB, ... in Secunden ausgedrückt, so wird obige Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} log.\ sin.\ A + log.\ sin.\ B + \cdots \\ - log.\ sin.\ A' - log.\ sin.\ B' - \cdots \\ + D\ log.\ sin.\ A\ .\ \Delta A + D\ log.\ sin.\ B\ .\ \Delta B + \cdots \\ - D\ log.\ sin.\ A'\ .\ \Delta A' - D\ log.\ sin.\ B'\ .\ \Delta B' - \cdots \end{aligned}\right\} = 0, \qquad (38)$$

unter welcher Form namentlich Bessel die Seitengleichungen aufstellt.

Es ist übrigens auch klar, dass wenn man $log.\ sin.\ (A + \varDelta A)$ nach dem Taylor'schen Satze entwickelt, man an die Stelle von $D\ log.\ sin.\ A$ setzen kann: $\frac{\pi}{180\ .\ 60^2}\ log.\ e\ .\ cotg.\ A$ u. s. w., wo e die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist. Endlich kann man, ohne zu den Logarithmen überzugehen, zunächst setzen:

$$sin.\,(A + \varDelta A)\,sin.\,(B + \varDelta B) \ldots = sin.\,(A' + \varDelta A')\,sin.\,(B' + \varDelta B') \ldots,$$

woraus leicht folgt:

$$\begin{aligned} sin.\ A\ sin.\ B\ sin.\ C \cdots &+ sin.\ B\ sin.\ C \ldots cos.\ A\,\varDelta A\,\varrho \\ &+ sin.\ A\ sin.\ C \ldots cos.\ B\,\varDelta B\,\varrho + \cdots \\ = sin.\ A'\,sin.\ B'\,sin.\ C' \cdots &+ sin.\ B'\,sin.\ C' \ldots cos.\ A'\,\varDelta A'\,\varrho \\ &+ sin.\ A'\,sin.\ C' \ldots cos.\ B'\,\varDelta B'\,\varrho + \cdots, \end{aligned}$$

wo $\varrho = \frac{\pi}{180\ .\ 60^2}$. Daraus ergiebt sich, wenn man beiderseits mit $\varrho\ sin.\ A'\ sin.\ B'\ sin.\ C' \ldots$ dividirt:

$$\left.\begin{aligned} \frac{180\,.\,60^2}{\pi}\left(\frac{sin.\,A\ sin.\,B\ sin.\,C \ldots}{sin.\,A'\,sin.\,B'\,sin.\,C' \ldots} - 1\right) &+ cotg.\ A\ .\ \varDelta A + \\ cotg.\ B\ .\ \varDelta B &+ cotg.\ C\ .\ \varDelta C + \cdots \\ - [cotg.\ A'\ .\ \varDelta A' + cotg.\ B'\,.\,\varDelta B' &+ cotg.\ C'\,.\,\varDelta C' + \cdots], \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

wo man

$$\frac{sin.\ B\ sin.\ C \ldots cos.\ A}{sin.\ B'\,sin.\ C' \ldots sin.\ A'} = \frac{cos.\ A}{sin.\ A} = cotg.\ A, \text{ u. s. w.}$$

gesetzt hat, indem ja $sin.\ B'\ sin.\ C' \ldots sin.\ A'$ nahezu $= sin.\ B\ sin.\ C \ldots sin.\ A$ ist. Unter der Form (39) entwickelt Bayer die Seitengleichungen. Zunächst wollen wir nun zu beiden Arten ein Beispiel zusetzen. Das erste ist aus Bessel's Gradmessung S. 147 und bezieht sich auf Fig. 4, in der man die Gleichung (a) hat. Es ist dort:

$$\begin{aligned} L'GC &= 49^0\,43'\,40{,}382'' + (21) - (28), \\ L'CL &= 67\ \ 18\ \ 30{,}506 + (32) - (31), \\ L'LG' &= 67\ \ 37\ \ \ \ 2{,}521 + (70), \\ LG'N &= 46\ \ 21\ \ \ \ 3{,}787 + (67) - (66), \\ L'NG &= \ \ 6\ \ 28\ \ 34{,}609 + (44) - (43), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L'CG &= 90^0\,53'\,40{,}054'' + (31) - (30),\\
L'LC &= 75\;36\;39{,}074 - (69),\\
L'G'L &= 71\;22\;57{,}648 + (66),\\
L'NG' &= 60\;50\;\;1{,}026 + (43) - (42),\\
NGL' &= 3\;48\;\;2{,}901 + (28) - (27).
\end{aligned}$$

Demnach $log.\ sin.\ x + D\ log.\ sin.\ x\ .\ \varDelta x$:

$$\begin{array}{l}
9{,}88251328 + \;\;17{,}839\ \{(21) - (28)\},\\
9{,}96501063 + \;\;\;8{,}804\ \{(32) - (31)\},\\
9{,}96598224 + \;\;\;8{,}761\ (70),\\
9{,}85948656 + \;\;20{,}085\ \{(67) - (66)\},\\
\underline{9{,}05227427 + 185{,}483}\ \{(44) - (43)\},\\
8{,}72526698;\\
9{,}99994711 - \;\;\;0{,}329\ \{(31) - (30)\},\\
9{,}98615770 - \;\;\;5{,}402\ (69),\\
9{,}97665758 + \;\;\;7{,}093\ (66),\\
9{,}94111694 + \;\;11{,}751\ \{(43) - (42)\},\\
\underline{8{,}82142840 + 316{,}938}\ \{(28) - (27)\},\\
8{,}72530773;\\
8{,}72526698\\
\underline{8{,}72530773}\\
\;\;\;\;- 4075,
\end{array}$$

also endlich ist

$$\begin{aligned}
0 = &- 407{,}5 + 17{,}839\ (21) + 316{,}938\ (27) - 334{,}777\ (28)\\
&- 0{,}329\ (30) - 8{,}475\ (31) + 8{,}804\ (32) + 11{,}751\ (42)\\
&- 197{,}234\ (43) + 185{,}483\ (44) - 27{,}178\ (66) + 20{,}085\ (67)\\
&+ 5{,}402\ (69) + 8{,}671\ (70)
\end{aligned}$$

die verlangte Seitengleichung.

Das zweite Beispiel ist aus Bayer's Küstenvermessung S. 275 entnommen. Die Bedingungsgleichung ist:

$$1 = \frac{sin.\ SPG\ sin.\ PRG\ sin.\ RSG}{sin.\ PSG\ sin.\ RPG\ sin.\ SRG};$$

$$\begin{aligned}
SPG &= 42^0\,52'\;\;1{,}046'' + (100),\\
PRG &= 150\;39\;\;1{,}131 + (99) - (97),\\
RSG &= 41\;20\;20{,}089 + (90) - (89),\\
PSG &= 56\;50\;29{,}415 + (91) - (89),\\
RPG &= 20\;17\;55{,}474 + (101) - (100),\\
SRG &= 49\;19\;\;4{,}747 + (99) - (98),
\end{aligned}$$

$(log.\ sin.\ x + cotg.\ x\ .\ \Delta x)$:

$$\begin{array}{l}
9{,}83269937 + 1{,}0774\ (100), \\
9{,}69031886 - 1{,}7784\ \{(99) - (97)\}, \\
9{,}81988051 + 1{,}1367\ \{(90) - (89)\}, \\
\hline
9{,}34289874; \\
9{,}92280889 + 0{,}6533\ \{(91) - (89)\}, \\
9{,}54022315 + 2{,}7035\ \{(101) - (100)\}, \\
9{,}87986339 + 0{,}8596\ \{(99) - (98)\}, \\
\hline
9{,}34289543; \\
9{,}34289874 \\
9{,}34289543 \\
\hline
0{,}00000331
\end{array}$$

(Zahl dazu) : $1{,}00000762$
$-\ 1$

$0{,}00000762$ davon der *log.*: $4{,}88196 - 10$

$\dfrac{log.\ 180\ .\ 60^2}{\pi}$: $5{,}31443$

$0{,}19639$

(Zahl dazu: $+ 1{,}572$),

also endlich

$$0 = 1{,}572 - 0{,}4834\ (89) + 1{,}1367\ (90) - 0{,}6533\ (91) + 1{,}7784\ (97) + 0{,}8596\ (98) - 2{,}6380\ (99) + 3{,}7809\ (100) - 2{,}7035\ (101).$$

Ein Beispiel für den Fall von Repetitionsbeobachtungen zu geben, halten wir nicht für nöthig, da der Ansatz nach Vorstehendem gewiss leicht ist.

Erörterung einiger besonderer Punkte.

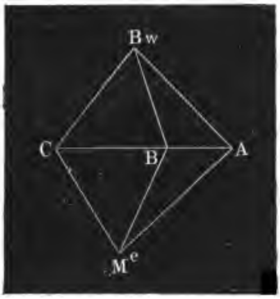
Neben den so eben betrachteten Fällen können jedoch noch einige andere auftreten. Es ist nämlich möglich, dass man in dem Netze zwei oder mehrere Grundlinien gemessen hat, oder dass ein Anschluss an sonst schon gemessene Grundlinien Statt hat. Sind G und G' die in Bogen verwandelten Grundlinien, so wird man in derselben Weise, wie man die Gleichung (a) erhielt, eine Gleichung der Form:

$$\frac{\sin. G}{\sin. G'} = \frac{\sin. (A + \varDelta A) \sin. (B + \varDelta B) \sin. (C + \varDelta C) \ldots}{\sin. (A' + \varDelta A') \sin. (B' + \varDelta B') \sin. (C' + \varDelta C') \ldots}$$

erhalten, wobei wir die gemessenen Grundlinien als durchaus genau annehmen, indem eine Correction bei diesem fundamentalen Elemente zuzulassen schon desshalb nicht räthlich ist, weil ein Anschluss von anderer Seite her abermals eine neue Correction nach sich ziehen würde. Die Geodäten vermeiden es übrigens, zwei Grundlinien in demselben Netze zu messen. — Dass man mehrere Gleichungen wie die obige erhält, wenn mehr als zwei Grundlinien im Netze vorkommen, ist klar; ebenso dass die Behandlung ganz ähnlich der früheren ist.

Ein zweiter Fall kann eintreten, wenn (wie z. B. bei Bayer) die Grundlinie in zwei Abtheilungen gemessen wurde. Die zwei Theile waren AB, BC (Fig. 5), welche drei Punkte zugleich Stationen waren, die in der Bildung der Bedingungsgleichungen beachtet worden sind. Die Länge von AB ist 588,509172 Toisen, von BC: 610,213860 (Küstenvermessung S. 10). Nimmt man beide Theile als durchaus genau an, und berechnet einen aus dem anderen, so erhält man die Bedingungsgleichung

Fig. 5.



$$1 = \frac{AB \,.\, \sin.\, BB^w A \,.\, \sin.\, BCB^w}{BC \sin.\, BAB^w \sin.\, BB^w C},$$

wo für $\sin.\, AB$ und $\sin.\, BC$ gleich die Bögen, also auch die Längen von AB und BC gesetzt wurden. Diese Bedingungsgleichung wäre den übrigen beizufügen, was jedoch Bayer nicht gethan.

Ein weiter hier zu berührender Fall ist der, da man einen Winkel in das Netz aufnimmt, der schon früher in einem anderen Netze gemessen und dort ausgeglichen wurde, und den man eben deshalb nicht ändern möchte. So z. B. nahm Bayer (Küstenvermessung S. 88 u. 96) auf der Station Trunz (M in Fig. 6) den Bessel'schen Winkel Galtgarben-Trunz-Wildenhof (EMF) auf, der $= 41^0 31' 57{,}9612''$ bei Bessel war. Die Anfangsrich-

tung war Brosowken (A). Bezeichnet man nun die Winkel BMA, CMA, ... mit A, B, ..., so hat man also die Bedingungsgleichung

$$E - D = 41^{0}\,31'\,57{,}9612'',$$

welche man schon bei der nach §. 16 auf der Station Trunz vorgenommenen Ausgleichung zu beachten hatte. Berechnet man

Fig. 6.

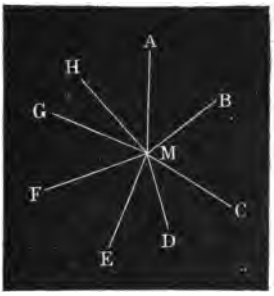
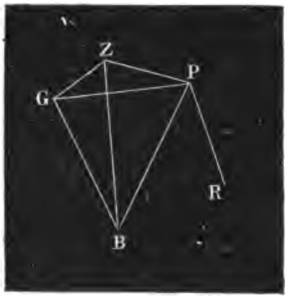


Fig. 7.



so auf dieser Station die Winkel, so wird man dann den Richtungen Galtgarben und Wildenhof (ME und MF) keine Correctionen im ganzen Netze zufügen.

Endlich kann es sich auch ereignen, dass einer oder mehrere der in der Gleichung (a) vorkommenden Winkel nicht unmittelbar gemessen wurden, vielmehr aus je zwei anderen zu schliessen sind. Wie man sich hierbei zu benehmen hat, ist leicht einzusehen. Sind $A + \varDelta A$, $B + \varDelta B$ zwei gemessene Winkel eines Dreiecks mit ihren Correctionen im ganzen Netze, ε der sphärische Excess des Dreiecks, so ist der dritte in Rechnung zu ziehende Winkel $= 180^{0} + \varepsilon - A - B - \varDelta A - \varDelta B$. Wir wählen zur Erläuterung ein Beispiel aus Bayer's Küstenvermessung S. 271, wobei es sich um die Bedingungsgleichung (Fig. 7):

$$1 = \frac{\sin.\,PZB\ \sin.\,ZGP\ \sin.\,GPB}{\sin.\,ZBP\ \sin.\,GZB\ \sin.\,PGB}$$

handelt. Die Beobachtungen waren (Richtungen):

In B: $G =$ $0^{0}\,0'\,0{,}000''$,		$ZGB = 83^{0}17'41{,}512'' + (58)$,
$Z =$ $41\;17\;44{,}459 + (52)$,		$GPB = 53\;23\;21{,}053 + (50) - (49)$,
$P =$ $49\;53\;\;9{,}647 + (53)$,		$ZPB = 83\;47\;\;4{,}384 + (51) - (49)$,
In G: $Z =$ $0\;0\;20{,}270$,		$ZGB = 76\;43\;32{,}532 + (58) - (57)$,
$P =$ $6\;34\;29{,}250 + (57)$,		$PZB =$
$B =$ $83\;18\;\;1{,}782 + (58)$,		$GZB =$
In P: $R =$ $0\;0\;\;0{,}000$,		
$B =$ $94\;25\;19{,}955 + (49)$,		
$G = 147\;48\;41{,}008 + (50)$,		
$Z = 178\;12\;24{,}339 + (51)$.		

Also

$$PBZ = \;\;8^{0}35'\,25{,}188'' + (53) - (52),$$
$$BPZ = 83\;\;47\;\;\;4{,}834\;\; + (51) - (49),$$
$$\overline{\qquad 92\;\;22\;\;29{,}572\;\; + (53) + (51) - (52) - (49), \quad \varepsilon = 0{,}764,}$$

$$PZB = 180^{0}0'0{,}764'' - 92^{0}\,22'\,29{,}572'' - (53) - (51) + (52) + (49)$$
$$= 87^{0}\,37'\,31{,}101'' + (49) + (52) - (53) - (51).$$

Ebenso $GZB = 55^{0}\,24'\,36{,}810'' - (52) - (58)$. Mithin zur Bildung der Endgleichung nach (39):

$$\begin{aligned}
PZB &= 87^{0}\,37'\,31{,}191'' + (49) + (52) - (51) - (53),\\
ZGB &= 83\;\;17\;\;41{,}512 + (58),\\
GPB &= 53\;\;23\;\;21{,}053 + (50) - (49),\\
ZGB &= 83\;\;47\;\;\;4{,}384 + (51) - (49),\\
GZB &= 55\;\;24\;\;36{,}810 - (52) - (58),\\
PGB &= 76\;\;43\;\;32{,}532 + (58) - (57),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&9{,}99962691 + 0{,}0415\,\{(49) - (51) + (52) - (53)\},\\
&9{,}99701928 + 0{,}1176\,(58),\\
&\underline{9{,}90455594} + 0{,}7430\,\{(50) - (49)\},\\
&9{,}90120213;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&9{,}99743961 + 0{,}1089\,\{(51) - (49)\},\\
&9{,}91552527 + 0{,}6896\,\{-(52) - (58)\},\\
&\underline{9{,}98823867} + 0{,}2359\,\{(58) - (57)\},\\
&9{,}90120355;
\end{aligned}$$

$$
\begin{array}{l}
9{,}90120213 \\
9{,}90120355 \\
\hline
9{,}99999858 \cdots + 0{,}9999966 \\
\phantom{9{,}99999858 \cdots} - 1 \\
\hline
\phantom{9{,}99999858 \cdots} - 0{,}0000034 \ldots 4{,}53147\,(-1) \\
\phantom{9{,}99999858 \cdots - 0{,}0000034 \ldots} 5{,}31443 \\
\hline
\phantom{9{,}99999858 \cdots - 0{,}0000034 \ldots} 9{,}84590\,(-1) \cdots - 0{,}701,
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = &- 0{,}701 - 0{,}5926\,(49) + 0{,}7430\,(50) - 0{,}1504\,(51) \\
&+ 0{,}7311\,(52) - 0{,}0415\,(53) + 0{,}2359\,(57) + 0{,}5713\,(58).
\end{aligned}
$$

Aufsuchung sämmtlicher Bedingungsgleichungen.

Ein höchst wichtiger Punkt ist nun, keine der Bedingungsgleichungen, deren Ansatz im Obigen ausführlich erörtert worden, zu übersehen. Sobald man sich aber klar macht, was diese Bedingungsgleichungen bedeuten und woher sie rühren, ist ein solches Uebersehen geradezu unmöglich. Die Bedingungsgleichungen der ersten Art sind wohl am leichtesten bemerkbar, ebenso die wegen mehrerer Grundlinien, oder getrennter Grundlinie, oder unveränderter Winkel, so dass bloss die Winkel- und Seitengleichungen zu betrachten bleiben. Nun entsteht irgend eine Bedingungsgleichung nur insofern, als eine oder mehrere Beobachtungen zu viel gemacht wurden; zu viel, weil es nach mathematischen Gesetzen möglich gewesen wäre, das Beobachtete aus anderem Beobachteten zu berechnen. Diese mathematischen Gesetze, in Form von Gleichungen ausgesprochen, bilden eben die fraglichen Bedingungsgleichungen.

Um alle zu erhalten, wird man dabei am besten folgenden von Bessel (Gradmessung S. 139) angedeuteten Weg einschlagen. Man gehe von zwei Anfangspunkten des Netzes aus, z. B. von den beiden Endpunkten der Grundlinien. Ein nächster Punkt des Netzes ist nun seiner Lage nach vollkommen bestimmt, wenn die Richtungen der zwei von den ersten Punkten aus an ihn gezogenen Linien in jenen zwei Punkten beobachtet wurden. Werden nun die zwei ersten Punkte vom dritten aus ebenfalls beobachtet, so ist ein Winkel zu viel beobachtet, und man erhält deswegen in diesem Dreiecke eine Winkelgleichung, wie (37). Ge-

setzt nun, ein vierter Punkt werde von allen dreien aus beobachtet und sie selbst von ihm aus, so wäre der Punkt 4 schon festgestellt, wenn er bloss von 1 und 2 aus beobachtet worden wäre; die Seite 3 4 (Richtung derselben) wäre also nicht nothwendig — deshalb entsteht eine Seitengleichung wie (a) —; die zwei Winkel in 4 zu beobachten, wäre ebenfalls nicht nöthig gewesen, und man erhält also noch zwei Winkelgleichungen, in den Dreiecken 1 2 4, 2 3 4. Geht man in dieser Art weiter, so übersieht man leicht, dass wenn ein Punkt von m anderen aus, und diese auch sämmtlich von ihm aus beobachtet wurden, man wegen der $m - 2$ überflüssigen Seiten $m - 2$ Seitengleichungen, und wegen der $m - 1$ überflüssigen Winkel am neuen Punkte $m - 1$ Winkelgleichungen erhält. Sind nicht sämmtliche Richtungen auch zurück beobachtet, so fallen einige der letzteren weg.

Als Beispiel wählen wir das Bessel'sche Netz (Fig. 8), in welchem durch die Pfeile an den Seiten angegeben ist, in welcher Richtung hin die Seiten beobachtet wurden. Wir gehen dabei von der Grundlinie Trenck-Mednicken aus.

1) Fuchsberg ist beobachtet von T und M und zurück — eine Winkelgleichung im Dreieck TFM, die I. bei Bessel (Gradmessung S. 141).

2) Wargelitten, beobachtet von T, M, F und zurück; 2 Winkelgl., 1 Seitengl., — Dreiecke TMW, WTF und die Brüche $\frac{TW}{MT}$, $\frac{MT}{TF}$, $\frac{TF}{TW}$ (II — IV bei Bessel).

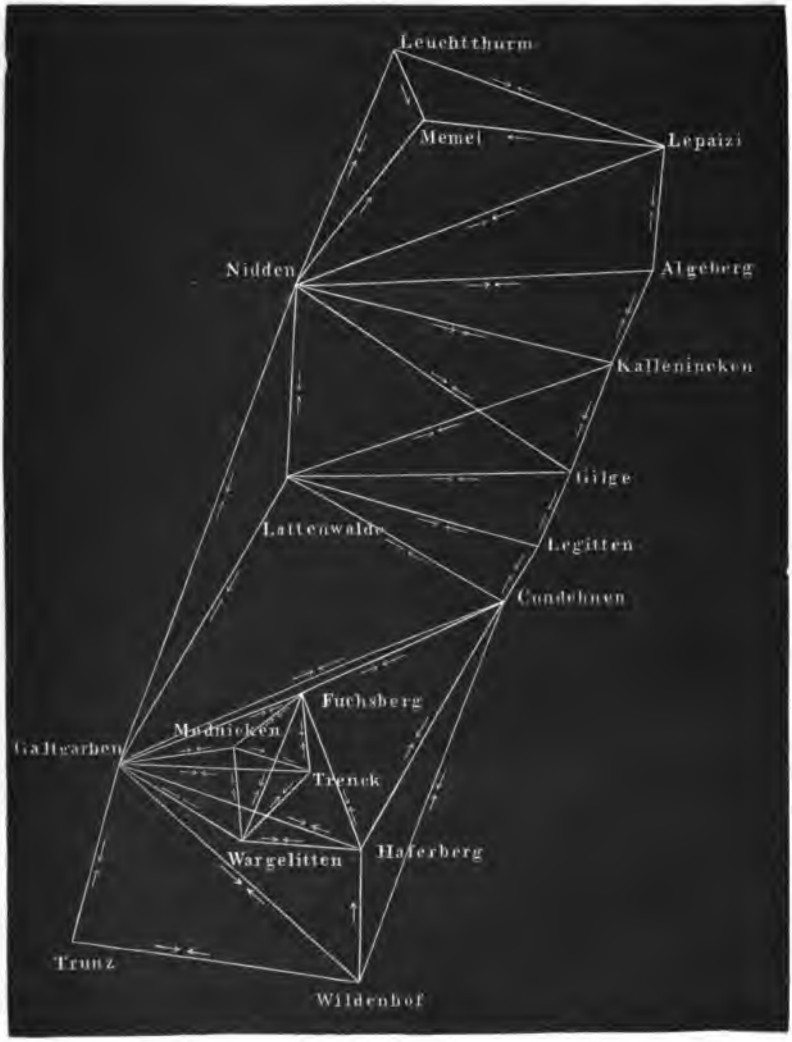
3) Galtgarben, beobachtet von T, M, F, W und zurück; 3 Winkelgl., 2 Seitengl. — Dreiecke GWF, GTF, GMF; Brüche $\frac{FG}{FW}$, $\frac{FW}{TT}$, $\frac{FT}{FG}$; — $\frac{FG}{FW}$, $\frac{FW}{FM}$, $\frac{FM}{FG}$ (V — IX bei B.).

4) Haferberg beobachtet von W, G, F und zurück; 2 Winkelgl., 1 Seitengl.; — Dreiecke FWH, FGH; Brüche $\frac{FG}{FW}$, $\frac{FW}{FH}$, $\frac{FH}{FG}$ (X — XII bei B.).

5) Condehnen, beobachtet von G, F, H und zurück; 2 Winkelgl., 1 Seitengl.; — Dreiecke GHC, FHC; Brüche $\frac{CH}{GH}$, $\frac{GH}{HF}$, $\frac{HF}{CH}$ (XIII — XV bei B.).

6) Wildenhof, beobachtet von G, C, und zurück, sowie zurück nach H; 1 Winkelgl., 1 Seitengl.; — Dreieck WCG; Brüche $\frac{GW}{CG}$, $\frac{CG}{GH}$,

Fig. 8.

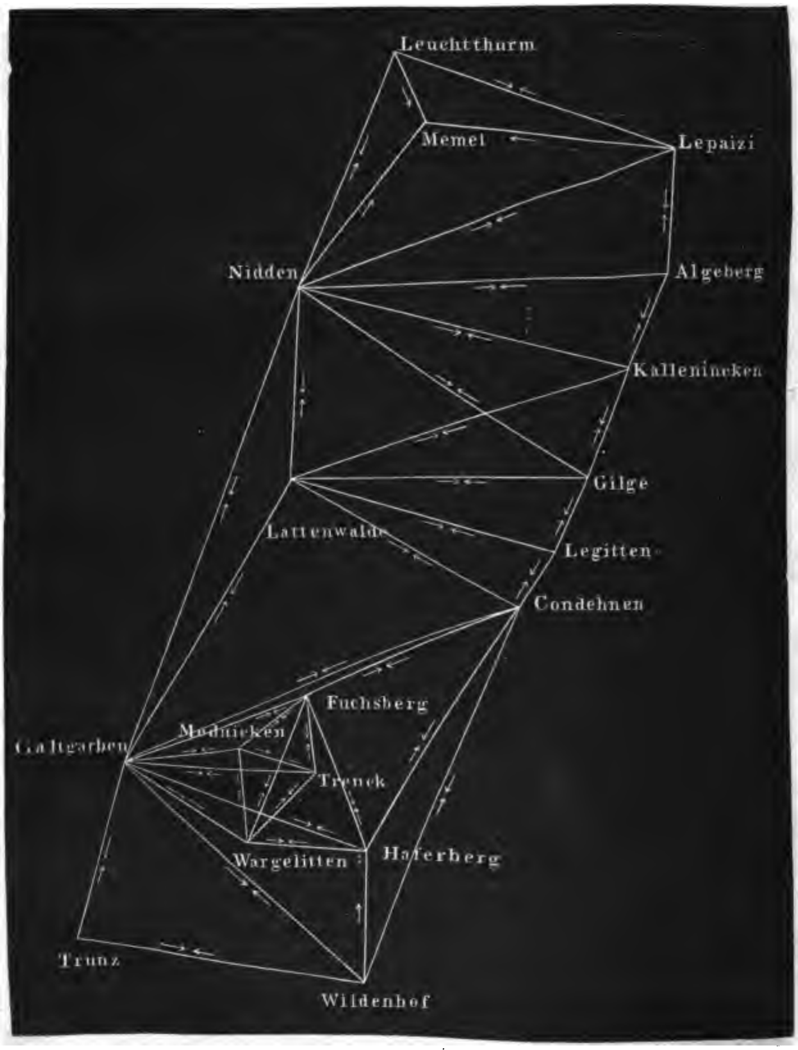


$\frac{GH}{GW}$ (XVI, XVII bei B.).

7) Trunz, beobachtet von W, G und zurück; 1 Winkelgl. Dreieck GTW (XVIII bei B.).

8) Lattenwalde, beobachtet von G, C und zurück; 1 Winkelgl.; Dreieck GCL (XIX bei B.).

Fig. 9.



9) Legitten, beobachtet von C, L^e und zurück; 1 Winkelgl.; Dreieck CL^eL^n (XX bei B.).

10) Gilge, beobachtet von L^e, L^n und zurück; 1 Winkelgl.; Dreieck $L^eL^nG^e$ (XXI bei B.).

11) Kallenincken, beobachtet von G^e, L^e und zurück; 1 Winkelgl.; Dreieck KL^eG^e (XXII bei B.).

12) Niddan, beobachtet von K, L^e, G^e, G^n und zurück; 3 Winkelgl., 2 Seitengl. — Dreiecke L^eG^eN, G^eKN, G^nL^eN; Brüche $\frac{NG^e}{L^eN}$, $\frac{L^eN}{KN}$, $\frac{KN}{NG^e}$; sodann $\frac{NL^e}{G^nL^e}$, $\frac{G^nL^e}{L^eC}$, $\frac{L^eC}{L^eL^n}$, $\frac{L^eL^n}{L^eG^e}$, $\frac{L^eG^e}{L^eN}$ (XXIII — XXVII bei B.).

13) Algeberg, beobachtet von N und K, und zurück; 1 Winkelgl.; — Dreieck AKN (XXVIII bei B.).

14) Lepaizi, beobachtet von N und A, und zurück; 1 Winkelgl.; — Dreieck LNA (XXIX bei B.).

15) Leuchtthurm, beobachtet von L^i, N, und zurück; 1 Winkelgl.; — Dreieck L^mL^iN (XXX bei B.).

16) Memel, beobachtet von L^iL^mN, aber nicht zurück; 1 Seitengl.; — Brüche $\frac{L^mM}{NM}$, $\frac{NM}{ML^i}$, $\frac{ML^i}{ML^m}$ (XXXI bei B.).

Durch diese 31 Bedingungsgleichungen sind sämmtliche Bedingungen des Bessel'schen Netzes erschöpft; andere kommen — den Messungen gemäss — nicht vor.

II. Wirkliche Ausgleichung der Winkel im ganzen Netze.

§. 18.

Die Gesammtausgleichung der Winkel in einem geodätischen Netze ist eine der Hauptaufgaben der höheren Geodäsie und wir haben sie desshalb auch mit der ihr gebührenden Ausführlichkeit abgehandelt. Nachdem man einmal sämmtliche Bedingungsgleichungen angesetzt, unterliegt sie keiner theoretischen Schwierigkeit. Wir werden hierbei berechtigt sein, entweder blosse Richtungsbeobachtungen oder blosse Repetitionsbeobachtungen vorauszusetzen, und wenden uns zunächst zu den ersteren.

Bei blossen Richtungsbeobachtungen.

Behalten wir die in §. 16, II. gebrauchte Bezeichnung bei, so muss die Summe:

$$\begin{aligned}&g_0 x^2 + g_1 (x + A - a)^2 + g_2 (x + B - b)^2 + g_3 (x + C - c)^2 + \cdots\\&+ g_0' x'^2 + g_1'(x' + A - a')^2 + g_2'(x' + B - b')^2 + g_3'(x' + C - c')^2 + \cdots\\&\quad\vdots\end{aligned}$$

ausgedehnt nicht nur auf alle Beobachtungsreihen auf einem Punkte, sondern auf sämmtliche Beobachtungsreihen in allen Punkten des Netzes, ein Minimum sein. Dabei sind A, B, C, ... die wahren Werthe der durch diese Grösse bezeichneten Richtungen. Bezeichnen wir nun aber durch A, B, C, ... nicht mehr die wahren Werthe, sondern die nach §. 16, II. berechneten (genäherten) Werthe dieser Richtungen (Winkel); sind dann $\varDelta A$, $\varDelta B$, $\varDelta C$, ... die Correctionen dieser Werthe im ganzen Netz, welche Grössen in obigen Beispielen durch (1), (2), (3), ... bezeichnet wurden (also eine andere Bedeutung haben als $\varDelta A$, $\varDelta B$, ... in §. 17), so muss die Summe

$$\left.\begin{aligned}&g_0 x^2 + g_1 (x + A + \varDelta A - a)^2 + g_2 (x + B + \varDelta B - b)^2 + \cdots\\&+ g_0' x'^2 + g_1'(x' + A + \varDelta A - a')^2 + g_2'(x' + B + \varDelta B - b')^2 + \cdots\\&\quad\vdots\end{aligned}\right\} \quad (b)$$

in derselben Weise ausgedehnt, ein Minimum sein. Man wird zunächst nun bemerken, dass die Summe (b) nichts Anderes ist, als die Gesammtsumme aller einzelnen ähnlichen Summen, wie wir sie in §. 16, II. aufgestellt haben, wenn man nur $A + \varDelta A$, $B + \varDelta B$, ... an die Stelle von A, B, ... treten lässt.

Zwischen den Grössen $\varDelta A$, $\varDelta B$, $\varDelta C$, ... (d. h. (1), (2), (3), ... nach Bessel's Bezeichnung) bestehen nun eine Reihe Bedingungsgleichungen, die wir mit

$$\left.\begin{aligned}0 &= K + \alpha\varDelta A + \alpha'\varDelta B + \alpha''\varDelta C + \cdots,\\0 &= L + \beta\varDelta A + \beta'\varDelta B + \beta''\varDelta C + \cdots,\\0 &= M + \gamma\varDelta A + \gamma'\varDelta B + \gamma''\varDelta C + \cdots,\\&\quad\vdots\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

bezeichnen wollen, und deren Aufstellung wir im Vorigen gezeigt haben. Sind nun $-2I$, $-2II$, $-2III$, ... gewisse noch zu bestimmende Constanten (§. 4), mit denen die zweiten Seiten der (40) multiplicirt und zu (b) addirt werden, so erhält man, wenn man nach x, x', ..., $\varDelta A$, $\varDelta B$, ... differenzirt und die Differentialquotienten gleich Null setzt:

$$
\left.\begin{aligned}
&(g_0 + g_1 + g_2 + \cdots)\,x + g_1(A + \varDelta A) + g_2(B + \varDelta B) + \cdots \\
&\qquad\qquad = g_1 a + g_2 b + \cdots, \\
&(g_0' + g_1' + g_2' + \cdots)\,x' + g_1'(A + \varDelta A) + g_2'(B + \varDelta B) + \cdots \\
&\qquad\qquad = g_1' a' + g_2' b' + \cdots, \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&(g_1 + g'_1 + g''_1 + \cdots)(A + \varDelta A) + g_1 x + g'_1 x' + g''_1 x'' + \cdots \\
&\quad = g_1 a + g'_1 a' + g_1'' a'' + \cdots + \alpha I + \beta II + \gamma III + \cdots, \\
&(g_2 + g_2' + g_2'' + \cdots)(B + \varDelta B) + g_2 x + g_2' x' + g_2'' x'' + \cdots \\
&\quad = g_2 b + g_2' b' + g''_2 b'' + \cdots + \alpha' I + \beta' II + \gamma' III + \cdots. \\
&\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}\right\} \quad (41)
$$

Man wird nun bemerken, dass die erste Abtheilung der Gleichungen (41) geradezu die sämmtlichen ersten Abtheilungen aller der Gleichungen (34) des §. 16 enthält, wenn man nur $A + \varDelta A$, $B + \varDelta B$, ... für A, B, ... setzt. Abgesehen von den Grössen I, II, ... verhält sich die zweite Abtheilung der Gleichungen (41) ebenso gegen die zweiten Abtheilungen der Gleichungssysteme (34). Zieht man also aus den ersten Abtheilungen der (41) die Werthe von x, x', ... und setzt sie in die zweiten Abtheilungen, so muss, immer abgesehen von I, II, III, ..., geradezu das System (35) herauskommen, ausgedehnt auf alle Punkte des ganzen Systems, wenn man in (35) nur $A + \varDelta A$, $B + \varDelta B$, ... für A, B, ... setzt. Hat man also die (35), wie bereits in §. 16 angegeben, so gebildet, dass man keinen Zeichenwechsel vorgenommen, noch auch etwa beiderseitig dividirt hat, so erhält man:

$$
\left.\begin{aligned}
&\quad p(A + \varDelta A) + p'(B + \varDelta B) + \cdots \\
&= m + \alpha I + \beta II + \gamma III + \cdots, \\
&\quad q(A + \varDelta A) + q'(B + \varDelta B) + \cdots \\
&= m' + \alpha' I + \beta' II + \gamma' III + \cdots, \\
&\quad r(A + \varDelta A) + r'(B + \varDelta B) + \cdots \\
&= m'' + \alpha'' I + \beta'' II + \gamma'' III + \cdots, \\
&\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}\right\} \quad (c)
$$

Da aber die Grössen A, B, C, ... den Gleichungen (35) genügen, so hat man endlich

$$\left.\begin{array}{l} p\,\Delta A + p'\,\Delta B + p''\,\Delta C + \ldots = \alpha\, I + \beta\, II + \gamma\, III + \ldots, \\ q\,\Delta A + q'\,\Delta B + q''\,\Delta C + \ldots = \alpha' I + \beta' II + \gamma' III + \ldots, \\ r\,\Delta A + r'\,\Delta B + r''\,\Delta C + \ldots = \alpha'' I + \beta'' II + \gamma'' III + \ldots, \\ \vdots \end{array}\right\} \quad (42)$$

aus welchen Gleichungen, in Verbindung mit (40) die Grössen ΔA, ΔB, ... bestimmt werden.

Man wird leicht sehen, dass man die einzelnen Auflösungen des §. 16 keineswegs nothwendig der jetzigen allgemeinen vorangehen lassen muss. Sind nämlich A, B, C,... genäherte Werthe der durch diese Buchstaben bezeichneten Winkel; ΔA, ΔB, ΔC, ... die denselben zugehörigen Correctionen, so wird man immerhin die Gleichungen (41) erhalten, aus denen durch Elimination die (c) folgen. Bestimmt man nun A, B, C, ... so, dass sie diesen Gleichungen (c) genügen, wenn man in ihnen ΔA, ΔB, ..., I, II, ... weglässt [d. h. den Gleichungen (35)], so erhält man ganz sicher die (42). Die Bedingungsgleichungen (40) sind dann freilich unter der Voraussetzung gebildet, dass die dortigen genäherten Werthe A, B, C, ... die soeben [aus (35)] ermittelten sind. Dabei ist zu bemerken, dass wir in §. 16 voraussetzen, es sei keinerlei Bedingungsgleichung bereits dort angewendet worden.

Da die definitive Auflösung der Gleichungen (42) und (40) die endgültig anzuwendenden Correctionen, d. h. die schliesslich zu benutzenden Winkel des Netzes giebt; diese Gleichungen aber eine sehr grosse Anzahl Unbekannter enthalten (bei Bessel 70 Correctionen nebst 31 unbestimmten Factoren), so ist es gut, wenn man sich durch Vorarbeiten im Laufe der Operationen die Endarbeit erleichtert. Die wirklichen Messungen erfordern immer viele Zeit, dauern oft Jahre lang, während nach den Formeln des §. 16 bloss die sämmtlichen Beobachtungen auf einer Station bekannt zu sein brauchen, um die angenäherten Werthe der dort beobachteten Richtungen zu finden. Verfährt man nun genau so, wie in §. 16, II. vorgeschrieben worden (so dass man, wie bereits bemerkt, die Gleichungen (35) bildet, indem man bloss die Werthe der x, x', ... substituirt, ohne etwa beiderseitig Zeichen zu ändern, abzukürzen, oder irgend welche Umformung vorzu-

nehmen), so weiss man, dass die Endgleichungen (42) auf ihren ersten Seiten dieselben Coëfficienten haben, während für $A, B, \ldots$ bloss ihre Correctionen im ganzen Netz eintreten. Setzt man also die zweiten Seiten der (42), die man erst später ermitteln kann, gleich P, Q, R, ... (Bayer bezeichnet sie durch [1], [2], ...), so hat man auf der berechneten Station sofort die Gleichungen:

$$\begin{aligned} p\varDelta A + p'\varDelta B + p''\varDelta C + \ldots &= P, \\ q\varDelta A + q'\varDelta B + q''\varDelta C + \ldots &= Q, \\ r\,\varDelta A + r'\varDelta B + r''\varDelta C + \ldots &= R, \\ &\vdots \end{aligned}$$

die in derselben Anzahl sind, wie $\varDelta A$, $\varDelta B$, $\varDelta C$, ... Hieraus zieht man dann sofort die Werthe von $\varDelta A$, $\varDelta B$, $\varDelta C$, ... in P, Q, R, ... und behält sich diese Resultate zu weiterem Gebrauche vor. — Wie gesagt können P, Q, R, ... erst bei der Schlussarbeit, d. h. nach Aufstellung der Bedingungsgleichungen (40) ermittelt werden. Sind α, β, γ, ... die Coëfficienten der Correction $\varDelta A$ in der ersten, zweiten, ... Gleichung (40), so ist

$$P = \alpha I + \beta II + \gamma III + \ldots;$$

ebenso wenn α', β', γ', ... die Coëfficienten der Correction $\varDelta B$ in den auf einander folgenden Gleichungen (40) sind, so ist

$$Q = \alpha' I + \beta' II + \gamma' III + \ldots,$$

u. s. w. Setzt man nun diese Werthe von P, Q, R, ... in die von $\varDelta A$, $\varDelta B$, $\varDelta C$, ..., so sind letztere Grössen durch I, II, III, ... ausgedrückt, und wenn man dann für $\varDelta A$, $\varDelta B$, ... in (40) die so eben erhaltenen Werthe einsetzt, so erhält man die zur Bestimmung von I, II, III, ... nöthigen Gleichungen.

Als Beispiel hierzu wollen wir das von Bayer (Küstenvermessung S. 83) gegebene beifügen. Es handelt sich dabei um die auf der Station Brosowken gemachten Beobachtungen. Die Berechnung derselben nach §. 16, II. gab

Buschkau:	0° 0′ 0,000″,
Stegen:	51 22 37,166 + (12),
Trunz:	93 55 18,384 + (13),
Talpitten:	137 33 28,197 + (14),

wo (12), (13), (14) die (späteren) Correctionen im ganzen Netze sind. Die Gleichungen, welche diese Winkel (A, B, C) gaben, waren

$$\begin{aligned}
22{,}0000\,A - 7{,}6667\,B - 6{,}3333\,C &= 167{,}7833,\\
-7{,}6666\,A + 23{,}3333\,B - 10{,}0000\,C &= -37{,}3884,\\
-6{,}3333\,A - 10{,}0000\,B + 22{,}6667\,C &= -87{,}3450.
\end{aligned}$$

Setzt man für die zweiten Seiten bezüglich [12], [13], [14], und für A, B, C: (12), (13), (14), so zieht man hieraus:

$$\begin{aligned}
(12) &= 0{,}06922\,[12] + 0{,}03827\,[13] + 0{,}03622\,[14],\\
(13) &= 0{,}03827\,[12] + 0{,}07401\,[13] + 0{,}04334\,[14],\\
(14) &= 0{,}03622\,[12] + 0{,}04334\,[13] + 0{,}07336\,[14],
\end{aligned}$$

welche Gleichungen bei der Station Brosowken aufgemerkt bleiben (Küstenvermessung S. 103). Was nun [12], [13], [14] anbelangt, so kommt in Bayer's Bedingungsgleichungen (Küstenvermessung S. 263) die Correction

(12) vor in den Gleichungen IV mit dem Coëfficienten -1, VI mit 1,0896, VII mit 1, so dass

$$[12] = -IV + 1{,}0896\,VI + VII;$$

(13) vor in III mit -1, IV mit 1, VI mit $-2{,}1384$, so dass

$$[13] = -III + IV - 2{,}1384\,VI;$$

(14) vor in III mit 1, VI mit 1,0488, so dass

$$[14] = III + 1{,}0488\,VI.$$

Setzt man dies oben ein, so ergiebt sich (S. 281)

$$\begin{aligned}
(12) &= -0{,}00205\,III - 0{,}03095\,IV + 0{,}03157\,VI + 0{,}06922\,VII,\\
(13) &= -0{,}03067\,III + 0{,}03574\,IV - 0{,}07110\,VI + 0{,}03827\,VII,\\
(14) &= +0{,}03002\,III + 0{,}00712\,IV + 0{,}02373\,VI + 0{,}03622\,VII.
\end{aligned}$$

Da schliesslich sich ergab: $III = -6{,}47275$, $IV = -11{,}43111$, $VI = 2{,}41926$, $VII = -4{,}40526$, so erhielt man definitiv: $(12) = 0{,}1385$, $(13) = -0{,}5506$, $(14) = -0{,}3779$ (S. 287).

Es versteht sich von selbst, dass man die in (41) vorkommenden x, x', ... ebenfalls hätte berechnen können; für die spätere Benutzung sind sie aber unwesentlich, da man ja später doch nur die Winkel kennen will. So wäre jetzt:

Winkel: Stegen, Brosowken, Buschkau	$= 51^0\,22'\,37{,}166'' + 0{,}1385$	
	$= 51\;\;22\;\;37{,}3045''$,	
„ Trunz, „ „	$= 93\;\;55\;\;18{,}384\;\;- 0{,}5506$	
	$= 93\;\;55\;\;17{,}8334''$,	
„ Talpitten, „ „	$= 137\;\;33\;\;28{,}197\;\;- 0{,}3779$	
	$= 137\;\;33\;\;27{,}8191''$.	

Bei blossen Winkel- (Repetitions-) Beobachtungen.

Es ist bereits in §. 16, I. angegeben worden, in welcher Weise an jeder einzelnen Station die Winkel mit den ihnen zukommenden Gewichten aus den Messungen berechnet werden. Man kann also, wenn A, B, C, ... die wahren Werthe der Winkel sind, annehmen, man habe gefunden durch directe Beobachtung

$$\begin{array}{llll} A = a_1 \text{ mit dem Gewichte } g_1, & = a_2 \text{ mit dem Gewichte } g_2, \ldots, \\ B = b_1 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad g_1', & = b_2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad g_2', \ldots, \\ C = c_1 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad g_1'', & = c_2 \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{„} \quad g_2'', \ldots, \\ & \vdots \end{array}$$

Alsdann muss die Summe

$$\left.\begin{array}{l} g_1\,(A - a_1)^2 + g_2\,(A - a_2)^2 + \ldots, \\ + g_1'\,(B - b_1)^2 + g_2'(B - b_2)^2 + \ldots, \\ + g_1''(C - c_1)^2 + g_2''(C - c_2)^2 + \ldots, \\ \qquad\qquad \vdots \end{array}\right\} \quad (d)$$

ausgedehnt auf alle Punkte des Netzes, ein Minimum sein. Es versteht sich von selbst, dass wir hier voraussetzen, man habe für A mehrere Repetitionsreihen, desgleichen für B, ... Angenommen nun, man berechne für A, B, C,... genäherte Werthe nach §. 16, I., nämlich

$$A = \frac{g_1\,a_1 + g_2\,a_2 + \cdots}{g_1 + g_2 + \cdots},\quad B = \frac{g_1'\,b_1 + g_2'\,b_2 + \cdots}{g_1' + g_2' + \cdots}, \ldots \qquad (e)$$

jeweils mit den Gewichten $g_1 + g_2 + \ldots$, $g_1' + g_2' + \ldots$, ... und lege diesen so berechneten Werthen die Correctionen im ganzen Netze $\varDelta A$, $\varDelta B$, ... bei, so muss also

$$\left.\begin{array}{l} g_1(A+\varDelta A-a_1)^2+g_2(A+\varDelta A-a_2)^2+\ldots \\ +g_1'(B+\varDelta B-b_1)^2+g_2'(B+\varDelta B-b_2)^2+\ldots+\ldots \end{array}\right. \quad (d')$$

ein Minimum sein, wenn A, B, ... die bereits in §. 16, I. gefundenen Werthe der so bezeichneten Winkel sind. Daneben bestehen nun die Bedingungsgleichungen (40), deren Ansatz in §. 17 erörtert wurde. Verfährt man mit denselben, wie oben, differenzirt dann (d') nach $\varDelta A$, $\varDelta B$, ..., so ergiebt sich:

$$\begin{array}{l} (g_1+g_2+\ldots)(A+\varDelta A)=g_1 a_1+g_2 a_2+\ldots \\ \qquad +\alpha I+\beta II+\gamma III+\ldots, \\ (g_1'+g_2'+\ldots)(B+\varDelta B)=g'_1 b_1+g'_2 b_2+\ldots \\ \qquad +\alpha' I+\beta' II+\gamma' III+\ldots, \\ \qquad \vdots \end{array}$$

d. h. da A, B, ... den Gleichungen (e) genügen:

$$\left.\begin{array}{l} (g_1+g_2+\ldots)\varDelta A=\alpha I+\beta II+\gamma III+\ldots, \\ (g_1'+g_2'+\ldots)\varDelta B=\alpha' I+\beta' II+\gamma' III+\ldots, \\ (g_1''+g_2''+\ldots)\varDelta C=\alpha'' I+\beta'' II+\gamma'' III+\ldots, \\ \qquad \vdots \end{array}\right\} \quad (43)$$

Setzt man die hieraus sich ergebenden Werthe von $\varDelta A$, $\varDelta B$, ... in (40), so erhält man die zur Bestimmung von I, II, III, ... nöthigen Gleichungen, worauf dann (43) die $\varDelta A$, $\varDelta B$, $\varDelta C$, ... geben. Was die Gewichte anbelangt, so wird, so lange dasselbe Instrument angewandt wird, nach den Vorschriften des §. 16, I. verfahren werden können, indem man z. B. durchweg das Gewicht der Repetitionszahl gleich setzt. Hat man aber verschiedene Instrumente bei den Messungen angewendet, so wird man sich nach §. 16, IV. zu benehmen haben.

Dass man an nicht gemessene Winkel keine Correctionen anbringen kann, versteht sich von selbst; es können aber in (43) recht wohl Winkel vorkommen, die, streng genommen, nicht in das Netz gehören, sondern die etwa nur gemessen worden, um die sämmtlichen Winkel um einen Punkt herum zu erhalten, u. s. w. Dass man diesen so gemessenen Winkeln trotzdem Correctionen im Netz zufügen muss, versteht sich wohl ebenso von selbst.

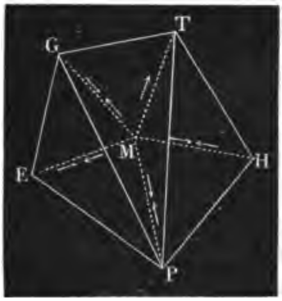
Zum Schlusse dieses Abschnitts wollen wir nun noch Auflösungen von zwei Aufgaben zufügen, die wir ebenfalls der „Kü-

stenvermessung“ von Bayer (S. 379 ff.) entlehnen, und die zugleich als ausführliche Beispiele zum Vorstehenden dienen können.

Einschiebung von Objecten in ein ausgeglichenes Netz.

Will man, nachdem die vollständige Ausgleichung des ganzen Dreiecksnetzes durchgeführt ist, Objecte einschieben, d. h. ihre Lage bestimmen, indem man die Punkte des Netzes nunmehr als absolut genau annimmt, so verfährt man in folgender Weise, die an zwei Beispielen erläutert werden soll.

Fig. 10.



1) Der Punkt Mutz (Fig. 10) wurde als Station gewählt und dort folgende Beobachtungen gemacht:

Gransee:	0^0	$0'$	$0{,}000''$	
Templin:	100	8	2,843	+ (1),
Hausberg:	159	22	18,716	+ (2),
Prenden:	196	9	54,087	+ (3),
Eichstädt:	262	1	51,132	+ (4),

ferner wurde beobachtet Mutz in Gransee, Eichstädt, Prenden, Hausberg und zwar:

Gransee:	Templin	0^0	$0'$	$0{,}000''$	
	Mutz	59	48	47,833	+ (5)
	Prenden	71	47	42,669	
	Eichstädt	126	4	11,920	
Eichstädt:	Gransee	0	0	0,000	
	Mutz	15	46	32,354	+ (6)
	Prenden	65	27	11,321	
Prenden:	Gransee	0	0	0,000	
	Mutz	4	11	2,893	+ (7)
	Templin	43	3	28,705	
	Hausberg	93	41	18,537	
	Eichstädt	299	43	37,338	
Hausberg:	Künkendorf	0	0	0,000	
	Prenden	181	34	21,224	
	Mutz	235	16	30,537	+ (8)
	Templin	279	18	41,171,	

wo nun (1), . . ., (8) die in dem besonderen Netze (s. Fig. 10) den betreffenden Richtungen beizufügenden Correctionen sind. Die übrigen Richtungen erhalten, als Richtungen im Hauptnetze, keine Correction *). Man hat nun folgende Bedingungsgleichungen:

I. Dreieck *MGE*.

Winkel an *M*:	97°	58′	8,868″	— (4),	
G:	66	15	24,088	— (5),	
E:	15	46	32,354	+ (6)	
	180	0	5,310		
ε =			0,776		

$$0 = 4{,}534 - (4) - (5) + (6).$$

II. Dreieck *MEP*.

Winkel an *M*:	65°	51′	57,045″	+ (4)	— (3),
E:	49	40	38,967	— (6),	
P:	64	27	25,556	+ (7)	
	180	0	1,568		
ε =			2,033		

$$0 = -\ 0{,}465 - (3) + (4) - (6) + (7).$$

III. Dreieck *MPH*.

Winkel an *M*:	36°	47′	35,371″	+ (3)	— (2),
P:	89	30	15,644	— (7),	
H:	53	42	9,533	+ (8)	
	180	0	0,548		
ε =			1,399		

$$0 = -\ 0{,}851 - (2) + (3) - (7) + (8).$$

*) Hierbei ist zu bemerken, dass die bei Gransee, . . ., Hausberg angegebenen Beobachtungen schon die im ganzen Netze ausgeglichenen sind; der Richtung nach Mutz wurde, obgleich sie auch im Netz ausgeglichen war, doch hier eine Correction beigelegt, da dieselbe nicht eigentlich in das Netz gehörte.

$$\text{IV.}\quad 1 = \frac{\sin.\,EMG\ \sin.\,EPM\ \sin.\,EGP}{\sin.\,EGM\ \sin.\,EMP\ \sin.\,EPG}\,.$$

$$\begin{aligned}
EMG &= 97^0\,58'\ \ 8{,}868'' - (4),\\
EPM &= 64\ \ 27\ \ 25{,}556 + (7),\\
EGP &= 54\ \ 16\ \ 29{,}251\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
EGM &= 66^0\,15'\,24{,}008'' - (5),\\
EMP &= 65\ \ 51\ \ 57{,}045 + (4) - (3),\\
EPG &= 60\ \ 16\ \ 22{,}662\,.
\end{aligned}$$

9,99578526 + 2,947 (4),	9,96158744 — 9,262 (5),
9,95532774 + 10,062 (7),	9,96027313 + 9,434 {(4) — (3)},
9,90946893	9,93872526
9,86058193	9,86058583
9,86058583	
— 39,0.	

$$0 = -\,39{,}0 + 9{,}434\,(3) - 6{,}487\,(4) + 9{,}262\,(5) + 10{,}062\,(7).$$

$$\text{V.}\quad 1 = \frac{\sin.\,HMP\ \sin.\,HTM\ \sin.\,HPT}{\sin.\,HPM\ \sin.\,HMT\ \sin.\,HTP}\,.$$

$$\begin{aligned}
HMP &= 36^0\,47'\,35{,}371'' + (3) - (2),\\
HTM &= 76\ \ 43\ \ 36{,}564 + (1) - (2) + (8),\\
HPT &= 50\ \ 37\ \ 49{,}831.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
HPM &= 89^0\,30'\,15{,}644'' - (7),\\
HMT &= 59\ \ 14\ \ 15{,}873 + (2) - (1),\\
HTP &= 31\ \ 37\ \ 52{,}812.
\end{aligned}$$

9,77737460 + 28,152 {(3) — (2)},
9,98824068 + 4,967 {(1) — (2) + (8)}
9,88821963,

9,65383491;

9,99998375 — 0,182 (7),
9,93414330 + 12,533 {(2) — (1)},
9,71970546

9,65383251;

$$\begin{array}{r} 9{,}65383491 \\ 9{,}65383251 \\ \hline 24{,}0. \end{array}$$

$$0 = 24{,}0 + 17{,}500\,(1) - 45{,}652\,(2) - 28{,}152\,(3) + 0{,}182\,(7) + 4{,}967\,(8).$$

$$\text{VI.}\quad 1 = \frac{\sin. MPE \sin. MHP \sin. MTH \sin. MGT \sin. MEG}{\sin. MEP \sin. MPH \sin. MHT \sin. MTG \sin. MGE}.$$

$$\begin{aligned}
MPE &= 64^0\,27'\,25{,}556'' + (7),\\
MHP &= 53\ 42\ \ 9{,}533 + (8),\\
MTH &= 76\ 43\ 36{,}564 + (1) - (2) + (8),\\
MGT &= 59\ 48\ 47{,}833 + (5),\\
MEG &= 15\ 46\ 32{,}354 + (6).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
MEP &= 49^0\,40'\,38{,}967'' - (6),\\
MPH &= 89\ 30\ 15{,}644 - (7),\\
MHT &= 44\ \ 2\ \ 9{,}342 - (8),\\
MTG &= 20\ \ 3\ \ 9{,}901 - (1) - (5),\\
MGE &= 66\ 15\ 24{,}088 - (5).
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l}
9{,}93533299 + 10{,}062\,(7),\\
9{,}90631114 + 15{,}466\,(8),\\
9{,}98824068 + \ \ 4{,}967\,\{(1) - (2) + (8)\},\\
9{,}93671045 + 12{,}248\,(5),\\
9{,}43436345 + 74{,}525\,(6)\\
\hline
9{,}22095871;
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
9{,}88219096 - 17{,}871\,(6),\\
9{,}99998375 - \ \ 0{,}182\,(7),\\
9{,}84205310 - 21{,}777\,(8),\\
9{,}53514867 - 57{,}688\,\{(1) + (5)\},\\
9{,}96159122 - \ \ 9{,}262\,(5),\\
\hline
9{,}22096770;
\end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9{,}22095871 \\ 9{,}22096770 \\ \hline -\ 89{,}9. \end{array}$$

$$0 = -\,89{,}9 + 62{,}655\,(1) - \ \ 4{,}967\,(2) + 79{,}198\,(5) + 92{,}396\,(6) + 10{,}244\,(7) + 42{,}210\,(8).$$

Die Beobachtungen waren alle gleich genau; legt man daher den Anfangsrichtungen keine Correctionen bei *), was ohnehin höchstens bei Mutz geschehen dürfte, so muss

$$(1)^2 + (2)^2 + \ldots + (8)^2$$

ein Minimum sein. Daraus folgt nun:

$$\begin{aligned}
(1) &= 17{,}500\, V + 62{,}655\, VI,\\
(2) &= -\, III - 45{,}652\, V - 4{,}967\, VI,\\
(3) &= -\, II + III + 9{,}434\, IV + 28{,}152\, V,\\
(4) &= -\, I + II - 6{,}487\, IV,\\
(5) &= -\, I + 9{,}262\, IV + 79{,}198\, VI,\\
(6) &= I - II + 92{,}396\, VI,\\
(7) &= -\, III + 10{,}062\, IV + 0{,}182\, V + 10{,}244\, VI,\\
(8) &= III + 4{,}967\, V + 42{,}210\, VI.
\end{aligned}$$

Substituirt man dies in die Bedingungsgleichungen, so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}
-\,4{,}534 &= 3{,}000\, I - 2{,}000\, II - 2{,}7750\, IV + 13{,}1980\, VI,\\
0{,}465 &= -\,2{,}000\, I + 4{,}000\, II - 2{,}000\, III - 5{,}8590\, IV\\
&\quad - 27{,}9700\, V - 82{,}1520\, VI,\\
0{,}851 &= -\,2{,}000\, II + 4{,}000\, III - 0{,}6280\, IV + 78{,}5890\, V\\
&\quad + 36{,}9330\, VI,\\
39{,}000 &= -\,2{,}7750\, I - 5{,}8590\, II - 0{,}6280\, III + 318{,}1000\, IV\\
&\quad + 267{,}4173\, V + 836{,}6070\, VI,\\
-\,24{,}000 &= -\,27{,}9700\, II + 78{,}5890\, III + 267{,}4173\, IV\\
&\quad + 3107{,}5944\, V + 1534{,}7375\, VI,\\
89{,}900 &= 13{,}1980\, I - 82{,}1520\, II + 36{,}9330\, III + 836{,}6070\, IV\\
&\quad + 1534{,}7375\, V + 20646{,}2877\, VI,
\end{aligned}$$

woraus:

$$\begin{aligned}
I &= -\,1{,}5438, & IV &= 0{,}1462,\\
II &= -\,0{,}2510, & V &= -\,0{,}0474,\\
III &= 1{,}0406, & VI &= 0{,}0001.
\end{aligned}$$

---

*) D. h. setzt man in der Grösse (b) in §. 18 alle x Null, und beachtet, dass $A = a$, $B = b, \ldots$, so erhält man die im Texte angegebene Formel. Uebrigens ist dies hier um so mehr zulässig, als die Beobachtungen in Mutz als Repetitionsbeobachtungen angesehen sind.

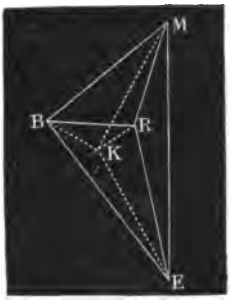
(1) =	— 0,830,	(5) =	2,906,
(2) =	1,123,	(6) =	— 1,284,
(3) =	1,337,	(7) =	0,172,
(4) =	0,344,	(8) =	0,809.

so dass endlich:

Station Mutz:	Gransee	0°	0′	0,000″,
	Templin	100	8	2,013,
	Hausberg	159	22	19,839,
	Prenden	196	9	55,424,
	Eichstädt	262	1	51,476.

2) Bestimmung des Monuments auf dem Kreuzberge bei Berlin (Fig. 11). — Beobachtungen:

Fig. 11.



Eichberg:	Berlin	0°	0′	0,0″,
	Kreuzberg	2	25	36,7,
				+ (1) (6 Beob.),
	Rauenberg	7	23	3,7,
	Müggelsberg	30	31	29,0.
Berlin:	Müggelsberg	0	0	0,0,
	Rauenberg	72	11	37,5,
	Kreuzberg	77	30	39,8
				+ (2) (6 Beob.),
	Eichberg	93	46	28,6.
Rauenberg:	Eichberg	0°	0′	0,0″,
	Kreuzberg	145	48	10,3
				+ (3) (8 Beob.),
	Berlin	151	2	5,4,
	Müggelsberg	233	30	15,8.
Müggelsberg:	Eichberg	0	0	0,0,
	Rauenberg	30	21	51,3,
	Kreuzberg	43	17	9,3,
				+ (4) (4 Beob.),
	Berlin	55	42	3,8.

$$\text{I.}\quad 1 = \frac{sin.\, MKB\ sin.\, MRK\ sin.\, MBR}{sin.\, MBK\ sin.\, MKR\ sin.\, MRB}.$$

$$
\begin{aligned}
MKB &= 90^0\ 4' 25{,}9'' - (2) + (4),\\
MRK &= 87\ 42\ \ 5{,}5\ - (3),\\
MBR &= 72\ 11\ 37{,}5.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
MBK &= 77^0 30' 39{,}8'' + (2),\\
MKR &= 79\ 22\ 36{,}7\ + (3) - (4),\\
MRB &= 82\ 28\ 10{,}4.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
9{,}99999964 + 0{,}1\ \{(2) - (4)\},\\
9{,}99965044 - 0{,}8\ (3),\\
9{,}97868073\\
\hline
9{,}97833081;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
9{,}98960011 + 4{,}7\ (2),\\
9{,}99249208 + 4{,}0\ \{(3) - (4)\},\\
9{,}99623811\\
\hline
9{,}97833030;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
9{,}97833081\\
9{,}97833030\\
\hline
51.
\end{array}
$$

$$0 = 5{,}1 - 4{,}6\,(2) - 4{,}8\,(3) + 3{,}9\,(4).$$

$$\text{II.}\quad 1 = \frac{\sin.\ MKB\ \sin.\ MEK\ \sin.\ MBE}{\sin.\ MBK\ \sin.\ MKE\ \sin.\ MEB}.$$

$$
\begin{aligned}
MKB &= 90^0\ 4' 25{,}9'' - (2) + (4),\\
MEK &= 28\ \ 5\ 52{,}3\ - (1),\\
MBE &= 93\ 46\ 28{,}6.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
MBK &= 77^0 30' 39{,}8'' + (2),\\
MKE &= 108\ 36\ 59{,}6\ + (1) - (4),\\
MEB &= 30\ 31\ 29{,}0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{l}
9{,}99999964 + 0{,}1\ \{(2) - (4)\},\\
9{,}67300149 - 39{,}5\ (1),\\
9{,}99905692\\
\hline
9{,}67205803;
\end{array}
$$

$$\begin{array}{l} 9{,}98960011 + 4{,}7\,(2), \\ 9{,}97665998 - 7{,}1\,\{(1) - (4)\}, \\ 9{,}70578683 \\ \hline 9{,}67204692; \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9{,}67205803 \\ 9{,}67204692 \\ \hline 111{,}1. \end{array}$$

$$0 = 111{,}1 - 32{,}4\,(1) - 4{,}6\,(2) - 7{,}2\,(4).$$

Da $6\,(1)^2 + 4\,(2)^2 + 8\,(3)^2 + 4\,(4)^2$ ein Minimum sein soll, so ist:

$$6\,(1) = -\,32{,}4\,II, \qquad 8\,(3) = -\,4{,}8\,I,$$
$$4\,(2) = -\,4{,}6\,I - 4{,}6\,II, \quad 4\,(4) = 3{,}9\,I - 7{,}2\,II,$$

woraus, wenn man in die Bedingungsgleichungen einsetzt:

$$-\,5{,}1 - 11{,}9725\,I - 1{,}73\,II; \quad -\,111{,}1 = -\,1{,}73\,I + 193{,}21\,II;$$
$$I = -\,0{,}5097, \quad II = -\,0{,}5796; \quad (1) = 3{,}1298, \quad (2) = 1{,}2527,$$
$$(3) = 0{,}3058, \qquad (4) = 0{,}5463.$$

Hiermit wollen wir die zur Erläuterung der allgemeinen Theorie beigefügten Beispiele schliessen. Wir bemerken zu den letzteren nur noch, dass es bei denselben wohl nicht auf die Bestimmung des Gewichtes ankommt, das man den berechneten Resultaten beizulegen hat, da es sich vorzugsweise um eine richtige Ermittelung dieser Resultate selbst handelt, alles Uebrige aber ziemlich gleichgültig ist.

Anhang.

Ueber die Bestimmung der Unbekannten aus denjenigen Gleichungen, die nach der Methode der kleinsten Quadratsummen gebildet sind.

Die nach dieser Methode gebildeten Gleichungen haben, wie aus dem seither Gesagten wohl klar sein wird, in Bezug auf ihre Coëfficienten eine eigenthümliche Bildungsweise, die man etwa in folgendem Schema aussprechen kann:

$$\begin{array}{l}
[a^2]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \cdots = [aF],\\
[ab]\,x + [b^2]\,y + [bc]\,z + \cdots = [bF],\\
[ac]\,x + [bc]\,y + [c^2]\,z + \cdots = [cF],\\
\qquad\qquad\vdots
\end{array}$$

wenn wir analoge Zeichen wie früher beibehalten. Für unseren Zweck mag es etwas bequemer sein, folgende Bezeichnung zu wählen:

$$\left.\begin{array}{l}
(11)\,x + (12)\,y + (13)\,z + (14)\,u + \cdots = (1\,F),\\
(12)\,x + (22)\,y + (23)\,z + (24)\,u + \cdots = (2\,F),\\
(13)\,x + (23)\,y + (33)\,z + (34)\,u + \cdots = (3\,F),\\
(14)\,x + (24)\,y + (34)\,z + (44)\,u + \cdots = (4\,F),\\
\qquad\qquad\vdots
\end{array}\right\}\quad(44)$$

worin also (11) den ersten Coëfficienten in der ersten Gleichung,

. . ., (mn) den $n$ten Coëfficienten in der $m$ten Gleichung vorstellt, und wo nun

$$(mn) = (nm) \qquad (a)$$

ist, d. h. wo der $n$te Coëfficient der $m$ten Gleichung gleich dem $m$ten Coëfficienten der $n$ten Gleichung ist. Eben so ist (nF) die zweite Seite der $n$ten Gleichung. Soll man nun aus den Gleichungen (44) die Unbekannten $x, y, z, u, \ldots$ bestimmen, so kann man in folgender Weise verfahren. Man ziehe aus der ersten Gleichung (44) den Werth von x und setze denselben in die übrigen Gleichungen ein, wo man zur Abkürzung setzt:

$$\left.\begin{array}{ll}
(22) - \frac{(12)^2}{(11)} = (22)_1, & (44) - \frac{(14)^2}{(11)} = (44)_1, \\
(23) - \frac{(12)(13)}{(11)} = (23)_1, & (45) - \frac{(14)(15)}{(11)} = (45)_1. \\
(24) - \frac{(12)(14)}{(11)} = (24)_1, & \vdots \\
\vdots & \\
(33) - \frac{(13)^2}{(11)} = (33)_1, & (2F) - \frac{(12)(1F)}{(11)} = (2F)_1, \\
(34) - \frac{(13)(14)}{(11)} = (34)_1, & (3F) - \frac{(13)(1F)}{(11)} = (3F)_1, \\
\vdots & \vdots
\end{array}\right\} (b)$$

so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}
(22)_1 y + (23)_1 z + (24)_1 u + \cdots = (2F)_1, \\
(23)_1 y + (33)_1 z + (34)_1 u + \cdots = (3F)_1, \\
(24)_1 y + (34)_1 z + (44)_1 u + \cdots = (4F)_1, \\
\vdots
\end{array}\right\} (44')$$

Bestimmt man hier wieder y aus der ersten Gleichung und setzt seinen Werth in die übrigen, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{array}{l}
(33)_2 z + (34)_2 u + \cdots = (3F)_2, \\
(34)_2 z + (44)_2 u + \cdots = (4F)_2, \\
(35)_2 z + (45)_2 u + \cdots = (5F)_2, \\
\vdots
\end{array}\right\} (44'')$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\left.\begin{array}{ll}
(33)_1 - \dfrac{(23)_1^2}{(22)_1} = (33)_2, & (55)_1 - \dfrac{(25)_1\,(25)_1}{(22)_1} = (55)_2, \\
(34)_1 - \dfrac{(23)_1\,(24)_1}{(22)_1} = (34)_2, & (56)_1 - \dfrac{(25)_1\,(26)_1}{(22)_1} = (56)_2, \\
\vdots & \vdots \\
(44)_1 - \dfrac{(24)_1\,(24)_1}{(22)_1} = (44)_2, & (3F)_1 - \dfrac{(23)_1\,(2F)_1}{(22)_1} = (3F)_2, \\
(45)_1 - \dfrac{(24)_1\,(25)_1}{(22)_1} = (45)_2, & (4F)_1 - \dfrac{(24)_1\,(2F)_1}{(22)_1} = (4F)_2, \\
\vdots & \vdots
\end{array}\right\} \quad (c)$$

Wie man hier weiter gehen kann, ist klar. Will man das Bildungsgesetz allgemein aussprechen, so ist:

$$\left.\begin{array}{l}
(mn)_{r-1} - \dfrac{(rm)_{r-1}\,(rn)_{r-1}}{(rr)_{r-1}} = (mn)_r, \\
(nF)_{r-1} - \dfrac{(rn)_{r-1}\,(rF)_{r-1}}{(rr)_{r-1}} = (nF)_r.
\end{array}\right\} \quad (d)$$

In dieser Weise erhält man Systeme von immer weniger Gleichungen, bis endlich nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig ist, die sich unmittelbar ergiebt. Wären z. B. sechs Unbekannte x, y, z, u, v, w vorhanden, so ergäbe sich w aus der Gleichung:

$$(66)_5\, w = (6F)_5, \quad w = \frac{(6F)_5}{(66)_5}.$$

Allgemein bei n Unbekannten, ergiebt sich die $n$te, die wir mit x_n bezeichnen wollen, aus

$$(nn)_{n-1}\, x_n = (nF)_{n-1}, \quad x_n = \frac{(nF)_{n-1}}{(nn)_{n-1}}. \qquad (e)$$

Nun bestimmt nach dem Satze des §. 7 (vergl. §. 9) der Coëfficient von (nF) in diesem Werthe von x_n das Gewicht letzterer Grösse. Aber es ist

$$(nF)_{n-1} = (nF)_{n-2} - \frac{(n-1, n)_{n-2}\,(n-1, F)_{n-2}}{(n-1,\, n-1)_{n-2}},$$

wo nun schon klar ist, dass (nF) nur in dem Theile $(nF)_{n-2}$ enthalten sein kann, da das Uebrige (nF) zu seiner Bildung nicht anspricht. Ebenso ist dann: